

Abschlusstest

Lesen Sie sich zuerst alle Aufgaben durch und bearbeiten zuerst die Aufgaben, die Ihnen leicht erscheinen.

Aufgabe 1 (Mengenlehre)

Für eine endliche Menge A bezeichnet die Kardinalität $\text{card}(A)$ die Anzahl der Elemente von A .

- a) Welche der folgenden Mengen sind gleich, welche verschieden?

$$A := \{x \in \mathbb{N} : x(x-2) = 3\}, \quad B := \{A \subseteq \mathbb{N}_{\leq 5} : \text{card}(A) > \text{card}(A \cup \{6\})\},$$

$$C := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 - q - 1 = 0\}, \quad D := \{\text{card}\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : nk = 4\}\}.$$

Tipp: Schreiben Sie die Mengen so einfach wie möglich!

- b) Es sei X eine Grundmenge und $A, B, C \subset X$ Teilmengen. Man zeige, dass

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Aufgabe 2 (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion für die angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

a)
$$\sum_{k=1}^n k \cdot (k+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

- b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 3 (Rekursive Folge)

Für $b > 1$ sei die Folge $(a_n)_n$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Betrachten Sie zuerst den Fall $b = 2$ und danach den Fall eines allgemeinen $b > 1$.

- a) Stellen Sie eine Wertetabelle für die ersten 5 Werte von (a_n) auf und leiten Sie eine Vermutung für eine explizite Formel für a_n ab.
- b) Beweisen man diese Vermutung.
- c) Konvergiert die Folge $(a_n)_n$? Wenn ja, gegen welchen Grenzwert? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Schülerdefinitionen von Grenzwerten)

Die Schülerinnen und Schüler eines Oberstufenjahrgangs wurden aufgefordert, den Grenzwert einer Folge in eigenen Worten zu definieren.

Hanna sagt: „Ein Grenzwert einer Folge ist die Zahl, in deren beliebig kleiner Nähe unendlich viele Folgenglieder liegen.“

Tom sagt: „Kommt eine Folge einer Zahl immer näher, so ist diese Zahl der Grenzwert der Folge.“

- a) Prüfen Sie die Charakterisierungen jeweils auf Korrektheit. Benennen Sie, wo genau Fehler vorliegen.
- b) Geben Sie Beispiele an, die Hanna bzw. Tom die Fehler aufzeigen.

Aufgabe 5 (Konvergenz von Folgen)

Entscheiden Sie, welche der nachstehenden Folgen konvergieren. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert oder geben Sie eine Begründung, falls die Folgen nicht konvergieren

a) $a_n = \frac{n^2+2}{2n^2-1}$.

b) $a_n = (-1)^n \frac{n^2+2}{2n^2-1}$.

c) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n^2-1}$.

d) $a_n = \frac{n^3+2}{2n^2-1}$.