Dr. Timo Essig, Dr. Marinela Wong
timo.essig@kit.edu, wong@hw-schule.de

Abschlusstest des zweiten Teils

Aufgabe 1.1 (Komplexe Zahlen)

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartestischer Form $a + \mathrm{i} \cdot b$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}$ (ii) $\overline{\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)}$ (iii) $\dfrac{\overline{1+\mathrm{i}}}{(2-\mathrm{i})^2}$

b) Beweisen Sie, dass folgende Aussagen für beliebige komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(i) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ (ii) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ (iii) $|z|^n = |z^n|, \; n \in \mathbb{N}$.

c) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung $z = r \cdot \mathrm{e}^{\varphi}$ an.

(i) $z_1 = 2\mathrm{i}$ (ii) $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ (iii) $z_3 = (1+\mathrm{i})^4$

d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

(i) $z^3 = -1$ (ii) $z^2 - (4+3\mathrm{i}) \cdot z + 1 + 5\mathrm{i} = 0$

Aufgabe 1.2 (Partielle Ableitungen)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy + x \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot y + f$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = \sin(ax + by)$ die Gleichung $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}$ erfüllt (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen).

c) Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 9$ in Punkt $P = (1,1,5)$ auf.

d) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und den Gradientenvektor folgender Funktionen:

(i) $f(x,y) = 4\sin(4x \cdot y)$ (ii) $g(x,y) = \mathrm{e}^x \sin(y) - \cos(x)$ (iii) $h(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$

e) Untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4xy + x + y$ auf kritische Punkte.

Abzugeben bis: 01.12.2019

Aufgabe 1.3 (Potenzreihen und Differentialgleichungen)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der folgenden *reellen* Potenzreihen! Geben Sie jeweils den Entwicklungspunkt an!

(i) $\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\lambda}}{\lambda^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2^{\ell}+3^{\ell}}{2\ell} \cdot (y-2)^{\ell}$ (iii) $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{u^p}{p\cdot(p+1)}$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ und zeigen Sie, dass innerhalb des Konvergenzbereichs $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ gilt.

c) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit dem Potenzreihenansatz:

(i) $\left\{\begin{matrix} 7y'' - 4y' - 3y = 6 \\ y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2 \end{matrix}\right\}$ (ii) $\left\{\begin{matrix} f''(t) - 10f'(t) + 9f(t) = 9t \\ f(0) = 1 \text{ und } f'(0) = 0 \end{matrix}\right\}$

Aufgabe 1.4 (Lagrange'sche Multiplikatoren)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to R,\ f(x,y) = x$ sowie die Mengen

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4\right\} \quad \text{und} \quad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 - x^3 + y^2\right\}.$$

a) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf S mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

b) Zeigen Sie, dass die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren nicht geeignet ist, um das Minimum von f auf T zu finden. *Tipp: Sie müssen dazu nicht die Lösungen x einer Gleichung der Form $4x^3 + 3x^2 = \frac{1}{\lambda}$ bestimmen. Begründen Sie stattdessen, warum $x \geq 0$ für jedes $(x,y) \in T$ gelten muss.*

Abzugeben bis: 01.12.2019