Dr. Timo Essig, Dr. Marinela Wong
timo.essig@kit.edu, wong@hw-schule.de

Abschlusstest

Aufgabe 1.1 (Mengenlehre)

a) Geg eben sind die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen: $A := \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} : 0 \geq x\}$, $C := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$. Bestimmen Sie $C \cap (A \cup B)$.

b) Untersuchen Sie die Richtigkeit der folgenden Gleichung für zwei Mengen A und B:

$$A \setminus B = A \cap (A \setminus B).$$

(Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

Aufgabe 1.2 (Vollständige Induktion)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion für die angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (D_n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, wobei D_n die Dreieckzahl ist, definiert als $D_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $n! > 2^n$ für alle $n \geq 4$.

c) Die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 9 teilbar.

Aufgabe 1.3 (Explizite und rekursive Folgen)

a) Geben Sie für die beiden gegebenen Folgen jeweils eine rekursive Form an.

(i) $a_n := 5n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (ii) $b_n := \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Geben Sie für die nachfolgenden rekursiv definierten Folgen jeweils die explizite Darstellung an und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

(i) $c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_{n+1} := \frac{n+1}{n^2+2n} \cdot c_n, \quad \forall n \geq 1$, (ii) $a_1 = 2, \quad d_{n+1} := 2 - \frac{1}{d_n}, \quad \forall n \geq 1$.

Aufgabe 1.4 (Monotonie und Beschränktheit)
Untersuchen Sie die Folgen, deren Glieder unten für $n \in \mathbb{N}$ angegeben sind, auf Beschränktheit und Monotonie.

a) $a_n := \dfrac{2n+1}{n}$, **b)** $b_n := b^n$, für $b \in (-1; 1)$, **c)** $c_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

Aufgabe 1.5 (Konvergenz von Folgen)

a) Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen mit den Grenzwertsätzen:

(i) $a_n := \frac{2n^2-3n}{5n^2+4}$, (ii) $b_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

b) Zeigen Sie, dass die durch Rekursionsformel $c_1 = \sqrt{2}$, $c_n := \sqrt{2 + c_{n-1}}$ gegebene Folge konvergiert. Untersuchen Sie dazu das Monotonieverhalten und zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge durch 2 nach oben beschränkt ist.

c) Benutzen Sie das Sandwichkriterium um zu zeigen, dass die durch $d_n := \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$ konvergiert.

Abzugeben bis: 11.07.2018