Aufgabenblatt 7

Anwendungen zu komplexen Zahlen

Achtung: Auf diesem Blatt schreiben wir die komplexe Einheit als „j“anstatt als „i“.

Aufgabe 7.1 (Die Eulersche Formel)
Auf Beispiel- und Aufgabenblatt 6 haben wir die Polardarstellung von komplexen Zahlen eingeführt. Kurz gesagt lässt sich so jede komplexe Zahl $0 \neq z \in \mathbb{C}$ eindeutig schreiben als

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)), \quad r \in (0,\infty),\ \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Ist eine komplexe Zahl $0 \neq z = x + \mathrm{j}y \in C$ gegeben, so kann man r und φ wie folgt berechnen (wobei $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ die Umkehrfunktion des Kosinus ist):

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{falls } y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Um noch einfacher mit der Polardarstellung rechnen zu können, führen wir zusätzlich noch die Darstellung über die komplexe Exponentialfunktion ein. Nach der sogenannten **Eulerschen Formel** lässt sich eine komplexe Zahl in Polardarstellung wie folgt schreiben:

$$r(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)) = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{e} \approx 2,718$ die sogenannte Eulersche Zahl. Wenn wir die komplexe Zahl so schreiben, können wir Potenzgesetze (die auch für beliebige komplexe Exponenten gelten) verwenden, um komplexe Zahlen zu multiplizieren:

$$(r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) \cdot (s \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}) = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi + \mathrm{j}\psi} = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+\psi)} \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen $\mathrm{e}^{\mathrm{j}z_i}$ für nachfolgende z_i. (Achtung: Die Eulersche Formel gilt nur für Exponenten der Form $\mathrm{j}\varphi$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$.)

(i) $z_1 = \dfrac{\pi}{6}$,

Lösung:
Hier können wir die Eulersche Formel verwenden. Laut der Tabelle von Aufgabenblatt 6 gilt: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit erhalten wir:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{6}}) = \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{6}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) $z_2 = \pi + \mathrm{j}$,

Lösung:
Hier benutzen wir zuerst die Potenzgesetze, um $\mathrm{e}^{\mathrm{j}z_2}$ zu vereinfachen und danach die Eulersche Formel. Beachten Sie, dass $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ gilt.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi+\mathrm{j})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi - 1} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{\cos(\pi) + \mathrm{j}\sin(\pi)}{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}}.$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi+\mathrm{j})}) = -\frac{1}{\mathrm{e}},\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi+\mathrm{j})}) = 0.$$

(iii) $z_3 = \frac{\pi}{4} - 2\mathrm{j}$.

Lösung:
Wir gehen wie bei der vorigen Teilaufgabe vor und verwenden zuerst die Potenzgesetze und dann die Eulersche Formel. Außerdem benutzen wir, dass $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{4}-2\mathrm{j})} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} \cdot \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{j}\sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{j})$$
$$\Rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{4}-2\mathrm{j})}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{4}-2\mathrm{j})}) = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}}.$$

b) Zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ sind genau dann gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen, d.h. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. Benutzen Sie diese Aussage zusammen mit Gleichung (1) mit $r = s = 1$, um die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi \pm \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) \pm \cos(\varphi)\sin(\psi),$$
$$\cos(\varphi \pm \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) \mp \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus zu beweisen.

Lösung:
Wir benutzen die Eulersche Formel und die Potenzgesetze. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{j}\sin(\varphi+\psi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+\psi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \\
=&(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + \mathrm{j}\sin(\psi)) \\
=&(\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)) + \mathrm{j}\,(\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)) \\
\Rightarrow\ &\cos(\varphi+\psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi), \\
&\sin(\varphi+\psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi).
\end{aligned}$$

Selbiges gilt auch für $\varphi - \psi$ anstelle von $\varphi + \psi$. □

Bemerkung: Wir beweisen hier weder die Eulersche Formel, noch geben wir die genaue Definition der Exponentialfunktion an. Wir wollen uns lediglich darauf beschränken, deren Anwendungen zu untersuchen.

Aufgabe 7.2 (Spule im Wechselstromkreis)
Das Wechselstrom-Modell einer realen Spule ohne Eisenkern wird häufig als Reihenschaltung ihrer Induktivität L und ihres von den Kupferwicklungen verursachten Ohmschen Widerstands R_L betrachtet. Durch das Anlegen einer Gleichspannung an die Spule wurde einen Widerstandswert von $R_L = 3\Omega$ ermittelt. Wird die Spule an einer Wechselspannungsquelle mit der Effektivspannung $U_{eff} = 10V$ und mit der Frequenz $f = 50Hz$ angeschlossen, so wird einen Scheinwiderstand $Z_0 = 5\Omega$ bestimmt.

a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der realen Spule, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm.

Lösung:

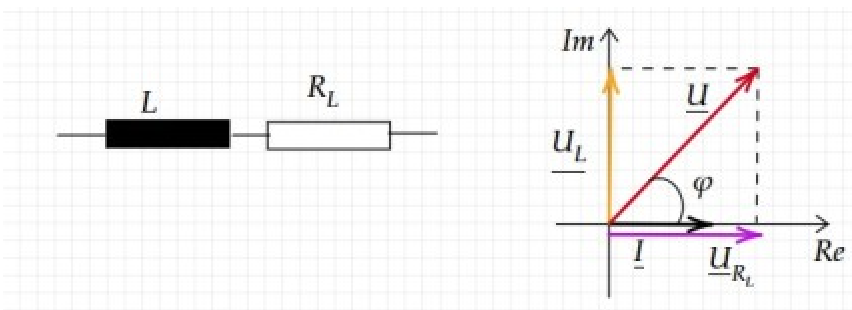

Abb. a): Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

b) Bestimmen Sie die Induktivität der Spule.

Lösung:
Die komplexe Induktivität der Spule ist $\underline{Z} = R_L \ + \mathrm{j}\omega L$ und ihr Scheinwiderstand $Z_0 = |\underline{Z}| = \sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}$. Somit berechnen wir für die Induktivität: $L = \sqrt{\dfrac{Z_0^2 - R_L^2}{\omega^2}} \approx 12,73$ mH.

c) Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen den Strom und der angelegten Spannung?

Lösung:
Die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der angelegten Spannung wird als

$$\varphi = \arctan \frac{Im\,(\underline{Z})}{Re\,(\underline{Z})} = \arctan \frac{\omega L}{R_L} \approx 53,13°$$

bestimmt.

Die Induktivität L der Spule kann durch die Verwendung eines Eisenkernes vergrößert werden. Im Eisenkern entstehen aber Hysterese- oder Wirbelstromverluste, die man mit einem im parallel zur idealen Induktivität L der Spule geschalteten Widerstand R_H berücksichtigt. Die neue Induktivität mit Eisenkern ist nun $L_1 = 120mH$, und der Widerstandswert verursacht von den oben genannten Verlusten ist $R_H = 10\Omega$.

d) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der realen Spule mit Eisenkern, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm.

Lösung:

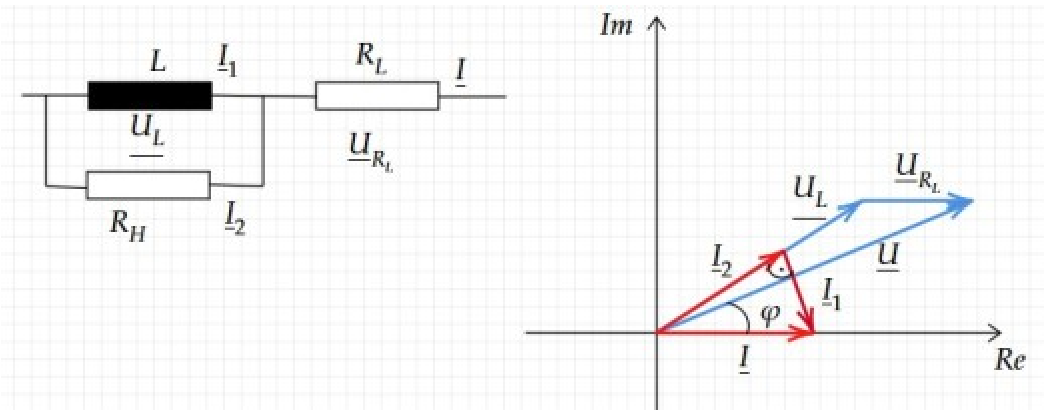

Abb. d): Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

e) Bestimmen Sie den neuen Scheinwiderstand der Spule, sowie die Phasenverschibung zwischen der Wechselspannung und dem Strom.

Lösung:
Die komlexe Impedanz der Parallelschaltung $\underline{Z}_P = \dfrac{\underline{Z}_L \cdot R_H}{\underline{Z}_L + R_H}$ wird mit dem Ohmschen Widerstand R_L der Spule addiert. Die komplexe Impedanz der ganzen Schaltung wird so

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{ges} &= \frac{\underline{Z}_L \cdot R_H}{\underline{Z}_L + R_H} + R_L = \frac{\mathrm{j}\omega L \cdot R_H}{\mathrm{j}\omega L + R_H} + R_L = \frac{\mathrm{j}\omega L \cdot R_H(-\mathrm{j}\omega L + R_H)}{\omega^2 L^2 + R_H^2} + R_L \\ &= \left(\frac{\omega^2 L^2 R_H}{\omega^2 L^2 + R_H^2} + R_L\right) + j\left(\frac{\omega L \cdot R_H^2}{\omega^2 L^2 + R_H^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{Z}_{ges}\right) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\left(\underline{Z}_{ges}\right)\end{aligned}$$

geschrieben. Der Scheinwiderstand $Z_0 = |\underline{Z}_{ges}|$, sowie die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung werden mit Hilfe des Real- und des Imaginärteils der komplexen Impadanz berechnet:

$$Z_0 = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2 R_H}{\omega^2 L^2 + R_H^2} + R_L\right)^2 + \left(\frac{\omega L \cdot R_H^2}{\omega^2 L^2 + R_H^2}\right)^2} \approx 12,59\Omega$$

$$\varphi = \arctan \frac{\left(\frac{\omega^2 L^2 R_H}{\omega^2 L^2 + R_H^2} + R_L\right)}{\left(\frac{\omega L \cdot R_H^2}{\omega^2 L^2 + R_H^2}\right)} \approx 11,35°$$

Aufgabe 7.3 (Kondensator im Wechselstromkreis)
Reale Kondensatoren weisen unerwünschte parasitäre Effekte auf, die die Kapazität negativ beeinflussen. Dazu gehört der Isolationswiderstand des Dielektrikums R_D, der nicht unendlich groß ist, und die Selbstentladung des aufgeladenen Kondensators verursacht. Das Ersatzschaltbild eines realen Kondensators besteht aus einem kapazitiven Blindanteil X_C parallel zu einem Wirkanteil R_D. Gegeben ist einen Kondensator der Kapazität $C = 1\mu F$, angeschlossen an einer Wechselspannungsquelle mit der Frequenz $f = 50Hz$. Der experimentell bestimmten Scheinwiderstand beträgt $Z_0 = 3181,5\Omega$.

a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des realen Kondensators, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm.

Lösung:

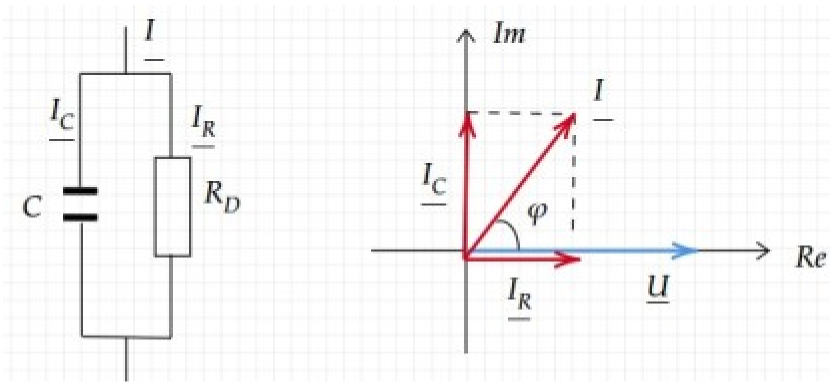

Abb. a): Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

b) Bestimmen Sie den Isolationswiderstand des Dielektrikums R_D.

Lösung:
Für die Bestimmung des Isolationswiderstandes R_D wird zuerst der Kehrwert der komplexen Impedanz der Parallelschaltung $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{X_C}} + \frac{1}{R_D} = j\omega C + \frac{1}{R_D}$ angegeben. Desweiteren wird die Eigenschaft der Beträge von komplexen Zahlen $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ angewendet als $\left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{|1|}{|\underline{Z}|} = \frac{1}{Z_0}$. Damit wird der Kehrwert des Scheinwiderstandes $\frac{1}{Z_0} = \sqrt{\omega^2 C^2 + \frac{1}{R_D^2}}$ in Abhängigkeit vom Isolationswiderstand geschrieben. Man kann nun seinen Wert berechnen:

$$R_D = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Z_0^2} - \omega^2 C^2}} \approx 100390,14\Omega$$

c) Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der angelegten Spannung?

Lösung:
Die Phasenverschibung zwischen Strom und Spannung wird mit Hilfe der Impedanz in komplexer Darstellung gegeben: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \left(\frac{1}{R_D} + \mathrm{j}\omega C\right) = \frac{\underline{U}}{R_D} + j\underline{U}\omega C$. Damit berechnen wir die Phasenverschiebung:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega C}{\frac{1}{R_D}}\right) = \arctan(\omega C R_D) \approx 88,18^0.$$

Aufgabe 7.4 (Zweigströme – Effektivwerte)
Eine Schaltung mit $L_1 = 100mH$, $L_2 = 20mH$, $R = 50\Omega$ und $C = 80\mu F$ wird wie in der Abb. 7.4 an einer Wechselspannungsquelle mit $U_{eff} = 10V$ und $f = 50Hz$ angeschlossen.

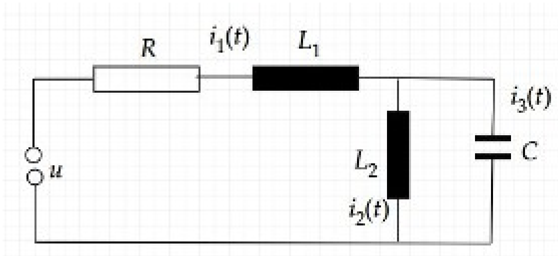

Abb 7.4: Schaltbild

a) Bestimmen Sie die komplexe Impedanz, sowie den Scheinwiderstand der Schaltung.

b) Geben Sie die Zweigströme I_1, I_2 und I_3 in komplexer Darstellung sowie die Effektivwerte an.

Lösung:

a) Die gegebene Schaltung besteht aus einer Parallelschaltung von C und L_2 mit der komplexen Impedanz $\underline{Z_P}$ und aus einer Reihenschaltung von R und L_1, der komplexen Impedanz $\underline{Z_R}$. Die Impedanz $\underline{Z_P} = \frac{\underline{X_C} \cdot \underline{X_{L2}}}{\underline{X_C} + \underline{X_{L2}}}$ wird mit $\underline{Z}_R = R + \mathrm{j}\omega L_1$ in komplexer Darstellung addiert:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{ges} &= \frac{-\frac{j}{\omega C} \cdot \mathrm{j}\omega L_2}{-\frac{j}{\omega C} + \mathrm{j}\omega L_2} + R + \mathrm{j}\omega L_1 \\ &= \frac{-\frac{j}{C} \cdot L_2}{-\frac{1}{\omega C} + \omega L_2} + \mathrm{j}\omega L_1 + R \\ &= R + j\left(\omega L_1 - \frac{\frac{1}{C} \cdot L_2}{-\frac{1}{\omega C} + \omega L_2}\right).\end{aligned}$$

Damit lässt sich der Scheinwiderstand der Schaltung wie folgt berechnet:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{\frac{1}{C} \cdot L_2}{-\frac{1}{\omega C} + \omega L_2}\right)^2} \approx 63,33\Omega.$$

b) Der Hauptstrom $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ges}}$. Im Betrag wird er $I_1 = |U|/Z_0$. Sein Effektivwert ist $I_{1eff} = U_{eff}/Z_0 = 157,9mA$ Die Kirchhoffschen Maschen- und Knotengesetze in komplexer Darstellung führen zu:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$
$$\underline{I}_2 \cdot \underline{X}_{L2} = \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_C.$$

Aus diesen zwei komplexen Gleichungen werden die Zweigströme abgeleitet:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 \cdot \underline{X}_C / \underline{X}_{L2}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{X}_{L2}}{\underline{X}_{L2} + \underline{X}_C} = \underline{I}_1 \cdot \frac{\mathrm{j}\omega L_2}{\mathrm{j}\omega L_2 - \frac{j}{\omega C}} = \underline{I}_1 \cdot \frac{\omega L_2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}} = -\underline{I}_1 \cdot \frac{\omega^2 C L_2}{1 - \omega^2 C L_2}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{-\frac{\mathrm{j}}{\omega C}}{\mathrm{j}\omega L_2 - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}} = \underline{I}_1 \cdot \frac{-\frac{1}{\omega C}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}} = \underline{I}_1 \cdot \frac{1}{1 - \omega^2 C L_2}.$$

Die Effektivwerte der Zweigströme werden durch einfache Multiplikation von I_{eff} mit den oben bestimmen Faktoren berechnet:

$$I_{3eff} = I_{1eff} \cdot \frac{\omega^2 C L_2}{1 - \omega^2 C L_2} \approx 29,61 mA$$

$$I_{2eff} = I_{1eff} \cdot \frac{1}{1 - \omega^2 C L_2} \approx 187,5 mA$$

Aufgabe 7.5 (Zweigströme – Scheitelwerte)

Bekannt sind R, L und C der folgenden Schaltung (Abb. 7.5), sowie die Scheitelwerte der Wechselspannungen zweier Spannungsquellen derselben Frequenz f, und ohne Phasenunterschied voneinander, U_1 und U_2. Bestimmen Sie die Zweigströme in komplexer Darstellung und ihre Scheitelwerte durch die Anwendung der Kirchoffschen Gesetze.

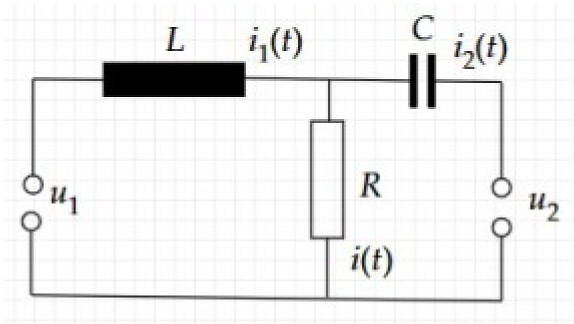

Abb 7.5: Schaltbild

Lösung:

Die komplexe Darstellung der Kirchhoffschen Gesetze für diese Schaltung ist:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{X}_L + \underline{I} \cdot R = \mathrm{j} X_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{I} \cdot R,$$
$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{X}_C + \underline{I} \cdot R = -\mathrm{j} X_C \cdot \underline{I}_2 + \underline{I} \cdot R,$$
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2.$$

Löst man dieses Gleichungssystem wie ein lineares Gleichungssystem, so können die komplexen Ströme wie folgt geschrieben werden:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1 X_C - \underline{U}_2 X_L}{R(X_C - X_L) + \mathrm{j} X_C X_L},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}R}{\mathrm{j}X_L} = \frac{R\left(\underline{U}_2 - \underline{U}_1\right) + \mathrm{j}\underline{U}_1 X_C}{-X_L X_C + \mathrm{j}R(X_C - X_L)},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}R}{-\mathrm{j}X_C} = \frac{R\left(\underline{U}_2 - \underline{U}_1\right) + \mathrm{j}\underline{U}_2 X_L}{X_L X_C - \mathrm{j}R(X_C - X_L)}.$$

Die Scheitelwerte dieser Ströme sind

$$I = |\underline{I}| = \frac{U_1 X_C - U_2 X_L}{\sqrt{X_L^2 X_C^2 + R^2 (X_C - X_L)^2}},$$

$$I_1 = |\underline{I}_1| = \sqrt{\frac{R^2 (U_2 - U_1)^2 + U_1^2 X_C^2}{X_L^2 X_C^2 + R^2 (X_C - X_L)^2}},$$

$$I_2 = |\underline{I}_2| = \sqrt{\frac{R^2 (U_2 - U_1)^2 + U_2^2 X_L^2}{X_L^2 X_C^2 + R^2 (X_C - X_L)^2}}.$$