

Beispielblatt 7 Harmonische Schwingungen und komplexe Zahlen

Achtung: Auf diesem Blatt wird die komplexe Einheit als „j“ anstatt „i“ geschrieben. Außerdem werden komplexe Ströme, Spannungen, etc. mit einem Unterstrich gekennzeichnet, z.B. i, u.

Hinweis: Bevor Sie beginnen, dieses Beispielblatt zu lesen, widmen Sie sich bitte zuerst der ersten Aufgabe vom siebten Aufgabenblatt!

Beispielaufgabe 7.1 (Harmonische Schwingung)

Meistens wird eine harmonische Schwingung durch eine Kosinus-Funktion oder durch eine Sinus-Funktion als Grundfunktion beschrieben:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{oder} \quad y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Dabei ist A die Amplitude, $\omega > 0$ die Kreisfrequenz oder Winkelgeschwindigkeit; $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Schwingungsdauer und φ der Nullphasenwinkel. $x(t)$ beschreibt mechanische Schwingungen oder physikalische Größen in elektrischen Schwingkreisen. Manchmal ist anstatt der Kreisfrequenz ω auch lediglich von „der Frequenz f “ die Rede. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ist durch die Formel $\omega = 2\pi \cdot f$ gegeben, woher auch der Name „Kreisfrequenz“ kommt, da wir die Frequenz mit dem Umfang eines Kreises multiplizieren. Die Addition von zwei harmonischen Schwingungen derselben Frequenz ergibt wieder eine harmonische Schwingung derselben Frequenz, und umgekehrt lässt sich eine harmonische Schwingung als Summe von „reinen“ Kosinus- und Sinusfunktionen darstellen:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = A[\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)] \\ &= A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Dabei sind $a = A \cos(\varphi)$ und $b = -A \sin(\varphi)$. Die Amplitude A und die Phase φ werden mit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan \varphi = -\frac{b}{a}$ berechnet.

Eine harmonische Schwingung wird mit Hilfe eines rotierenden Zeigers befestigt im Ursprung eines kartesischen x-y-Koordinatensystems modelliert. Der dynamische Zusammenhang zwischen dem rotierenden Zeiger und dem Schaubild der Sinus- oder Kosinusfunktion der Schwingung wird in der folgenden GeoGebra-Anwendung <https://www.geogebra.org/m/ntuwmr2d> veranschaulicht. Der Zeiger hat den Betrag A und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Der Nullphasenwinkel φ gibt die Winkelposition des Zeigers zur x-Achse zum Zeitpunkt $t = 0$. Die senkrechte bzw. waagerechte Projektion des Zeigers wird mit der obigen $x(t)$ bzw. $y(t)$ Funktion gegeben.

Dieser rotierende Zeiger wird jetzt als drehbarer Zeiger in der komplexen Zahlenebene betrachtet. Seine von der Zeit abhängige Position wird als $z(t)$ bezeichnet (siehe Abb. 1).

Grundlage für die komplexe Darstellung ist die Euler'sche Formel (siehe Aufgabe 7.1):

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= \operatorname{Re} e^{j\varphi} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \operatorname{Im} e^{j\varphi} \end{aligned}$$

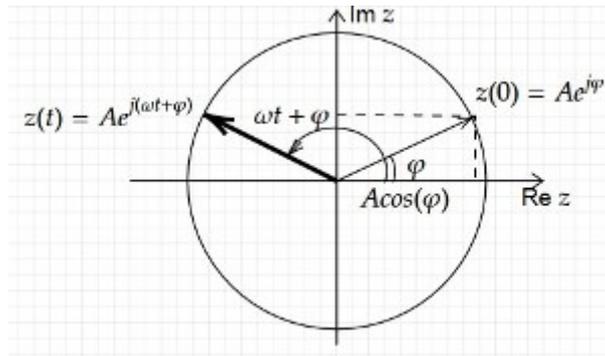


Abbildung 1: Rotierender Zeiger in der komplexen Zahlenebene

Die komplexe Zeigerdarstellung einer harmonischen Schwingung $z(t)$ wird folgendermaßen geschrieben:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \\
 \Rightarrow x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} z(t) \\
 \Rightarrow y(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im} z(t)
 \end{aligned}$$

Der Graph der komplexen Funktion $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$ gegen die Zeit t ist eine Schraubenkurve (Helix). Die folgende GeoGebra-Anwendung <https://www.geogebra.org/m/hszf2jpp> zeigt die Bewegung eines Punktes (Spitze des Zeigers) auf dieser Kurve (Abb. 2). Der Ansicht von oben als Projektion auf die x - y -Ebene lässt sich als Kreisbewegung in der komplexen Ebene auffassen. Der Seitenansicht, als Projektion auf die x - z -Ebene zeigt die Schwingung im Reellen. Nun wird der Zeiger als Produkt zweier Komponenten

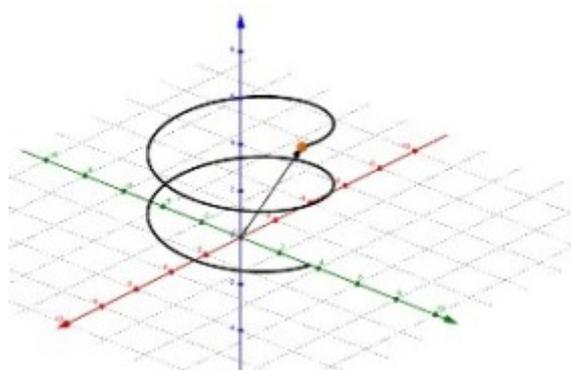


Abbildung 2: Graph der komplexen Schwingungsfunktion

gegeben:

$$z(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

Der erste Faktor $Ae^{j\varphi}$ unabhängig von der Zeit ist selbst ein komplexer Zeiger. Er wird *komplexe Amplitude* von $z(t)$ genannt, und er beinhaltet den Betrag A und die Anfangsposition φ des Zeigers. Der zweite Faktor $e^{j\omega t}$ ist ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Einheitszeiger. Damit kann die Funktion $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ als Realteil des in der komplexen Zahlenebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden komplexen Zeigers $z(0) = Ae^{j\varphi}$ betrachtet werden.

Beispiel 1

$x(t) = 4 \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Re} z(t)$. Der komplexe Zeiger $z(t) = 4e^{j(4t - \frac{\pi}{3})} = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j4t}$ hat die komplexe Amplitude

$$z(0) = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} = 4 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] = 4 \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - 2j\sqrt{3}$$

In vielen Anwendungen wird die Addition harmonischer Schwingungen verlangt. Zuerst wird die Addition zweier harmonischer Schwingungen **gleicher Frequenz** behandelt.

Gegeben seien zwei Schwingungen derselben Kreisfrequenz ω , $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ und $x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Die Summe der zwei Schwingungen ist dann auch eine Schwingung der Frequenz ω :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Wir orientieren uns bei der Rechnung an den folgenden Schritten:

Schritt 1: Übergang zu komplexer Zeigerdarstellung.

$$\begin{aligned} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) &\Rightarrow z_1(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = A_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} = z_1(0) \cdot e^{j\omega t} \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) &\Rightarrow z_2(t) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = A_2 e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t} = z_2(0) \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Addition der komplexen Zeiger

$$\begin{aligned} z(t) = z_1(t) + z_2(t) &= z_1(0) \cdot e^{j\omega t} + z_2(0) \cdot e^{j\omega t} = (z_1(0) + z_2(0)) \cdot e^{j\omega t} = z(0) \cdot e^{j\omega t} \\ &= A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die komplexe Addition kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch durchgeführt werden, siehe Beispiel 2.

Schritt 3: Übergang zu reellen Schwingungsdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} z(t) \\ A &= \sqrt{\operatorname{Re}^2 z(0) + \operatorname{Im}^2 z(0)} \\ \tan \varphi &= \frac{\operatorname{Im} z(0)}{\operatorname{Re} z(0)}, \end{aligned}$$

wobei die Amplitude und die Phase durch nachfolgende Formeln gegeben sind.

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \\ A &= \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned}$$

Beispiel 2

Wir addieren die beiden Schwingungen $x_1(t) = 4 \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)$ und $x_2(t) = 2 \cos\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Schritt 1:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 4 \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z_1(t) = 4e^{j\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j4t} = z_1(0) \cdot e^{j4t} \\x_2(t) &= 2 \cos\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow z_2(t) = 2e^{j\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j4t} = z_2(0)e^{j4t}\end{aligned}$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned}z(t) &= z_1(t) + z_2(t) = z(0)e^{j\omega t} \\z(0) &= (z_1(0) + z_2(0)) = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{6}} \\&= 4 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] + 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\&= 4 \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) = (2 + \sqrt{3}) + j(1 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

Die komplexe Amplitude ist also $z(0) = (2 + \sqrt{3}) + j(1 - \sqrt{3})$.

Schritt 3: Die Amplitude A , sowie die Phase φ der resultierenden Schwingung ergeben sich als Betrag und als Argument der komplexen Amplitude.

$$A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} \approx 3,8$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right) \approx -0,194 \quad (\varphi \approx -11,098^\circ) \Rightarrow z(0) = 3,8e^{-j0,194}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \approx 3,8 \cos(4t - 0,194)$$

Wie in der obigen Bemerkung angekündigt, kann man die komplexe Amplitude auch grafisch darstellen und mit der Parallelogrammregel addieren, siehe Abb. 3.

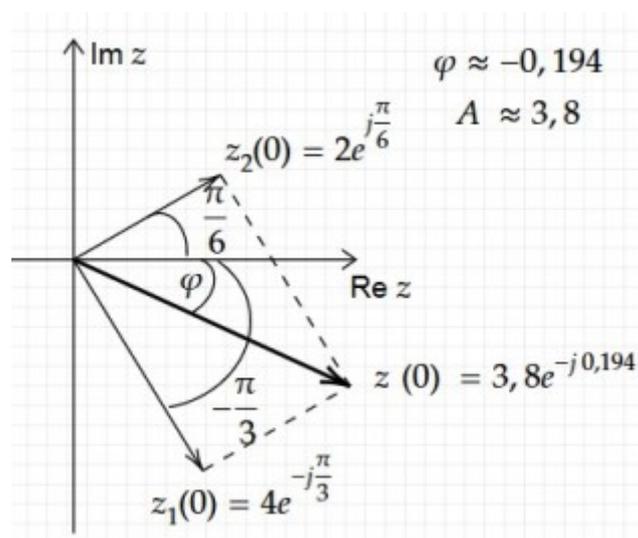


Abbildung 3: Die grafische Addition der Amplituden mittels Parallelogrammregel

Falls eine Schwingung in Kosinusdarstellung $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ und die zweite in Sinusdarstellung $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ gegeben ist, dann muss eine gemeinsame Darstellung gewählt werden, indem man die Relationen von Beispielblatt 6 benutzt, z. B. $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2})$, oder $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{\pi}{2})$.

Beispielaufgabe 7.2 (Komplexer Wechselstromkreis – Grundlagen)

Sehr häufig werden die komplexen Zahlen zur Untersuchung von Wechselstromkreisen aus Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen verwendet. Dabei wird die Spannung einer Spannungsquelle in Sinus- oder Kosinusdarstellung gegeben $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$. Die Kondensatoren und die Spulen verursachen im Allgemeinen eine Phasendifferenz zwischen Spannung und Stromstärke $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Für einen Ohmschen Widerstand gilt das von Gleichstromkreisen bekannte Ohmsche Gesetz auch im Wechselstromkreis: $u(t) = R \cdot i(t)$. Da R eine reelle Zahl ist, verursacht der Ohmsche Widerstand selber keine Phasenverschiebung des Stroms zur Spannung.

Der Zusammenhang zwischen der angelegten Spannung am Kondensator und seiner Ladung Q wird über die Kapazität des Kondensators angegeben: $Q = C \cdot U$. Variiert die Spannung am Kondensator mit der Zeit t , so ruft die variable Ladung $Q(t)$ einen Strom $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ hervor.

Eine Spule mit der Induktivität L , die von variablem Strom $i(t)$ durchfloßen ist, erzeugt eine selbst-induzierte Spannung $e(t) = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -u_L(t)$.

Nun wollen wir zeigen, dass Ohmsche Gesetze der Form $u(t) = Z \cdot i(t)$ auch für Kondensatoren und Spulen in RLC-Wechselstromkreisen gelten. Wird eine einfache kosinusförmige Spannung $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ an eine Kapazität C angelegt, so wird diese als Realteil der komplexen Spannung $\underline{u}(t)$ betrachtet:

$$U_0 \cos(\omega t) = u(t) = \operatorname{Re} \underline{u}(t), \quad \underline{u}(t) = U_0 e^{j(\omega t)}.$$

Die komplexe Darstellung des Stroms $\underline{i}(t)$ ist

$$\underline{i}(t) = C \cdot \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt} (U_0 e^{j(\omega t)}) = j\omega C \cdot U_0 e^{j(\omega t)} = j\omega C \cdot \underline{u}(t)$$

Das Ohmsche Gesetz für den Kondensator in komplexer Darstellung ist

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i}(t) = -\frac{j}{\omega C} \cdot \underline{i}(t) = \underline{Z}_C \cdot \underline{i}(t) = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot I_0 e^{j(\omega t)} = \frac{I_0}{\omega C} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Dabei ist $\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ der kapazitive komplexe Widerstand des Kondensators, auch kapazitive Reaktanz genannt. Diese hat einen stets negativen Imaginärteil. Das Minus-Vorzeichen zeigt, dass der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ vorausschlägt.

Für die Darstellung in Zeigerdiagrammen wird die komplexe Spannung am Kondensator wie folgt definiert.

$$\underline{U}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot I_0 = -\frac{j}{\omega C} \cdot I_0.$$

Der komplexe Zeiger \underline{U}_C wird auf der imaginären Achse grafisch dargestellt.

Wird eine Spule der Induktivität L von einem Strom $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ durchfloßen, so geht dieser in komplexe Darstellung über, d.h.

$$\underline{i}(t) = I_0 e^{j(\omega t)}$$

Auch die an der Spule induzierte Spannung wird in komplexer Darstellung geschrieben:

$$\underline{u}(t) = L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt} \left(I_0 e^{j(\omega t)} \right) = j\omega L \cdot I_0 e^{j(\omega t)} = j\omega L \cdot \underline{i}(t).$$

Das Ohmsche Gesetz für die Induktivität in komplexer Darstellung ist

$$\underline{u}(t) = j\omega L \cdot \underline{i}(t) = \underline{Z}_L \cdot \underline{i}(t) = j\omega L \cdot I_0 e^{j(\omega t)} = \omega L e^{MIU \frac{\pi}{2}} \cdot I_0 e^{j(\omega t)} = \omega L I_0 \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

Dabei ist $\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{MIU \frac{\pi}{2}}$ der induktive komplexe Widerstand der Induktivität L , auch die induktive Reaktanz genannt. Ihr Imaginärteil ist stets positiv. Der Strom hinkt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher. Für die Darstellung in Zeigerdiagrammen wird die komplexe Spannung an der Spule wie folgt definiert.

$$\underline{U}_L = \omega L e^{MIU \frac{\pi}{2}} \cdot I_0 = j\omega L \cdot I_0.$$

Der komplexe Zeiger \underline{U}_L wird auf der imaginären Achse grafisch dargestellt. Im Allgemeinen gibt es eine Phasendifferenz φ zwischen Spannung und Stromstärke in Wechselstromkreisen. Der komplexe Gesamtwiderstand \underline{Z} lässt sich mit dem Ohmschen Gesetz in komplexer Darstellung so schreiben:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{U_0 e^{j(\omega t)}}{I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0 e^{j(\omega t)}}{I_0 e^{j\omega t} \cdot e^{-j\varphi}} = \frac{U_0}{I_0 \cdot e^{-j\varphi}} = Z_0 e^{j\varphi}$$

Der komplexe Gesamtwiderstand \underline{Z} , auch Impedanz genannt, wird nun in wie folgt algebraischer Form geschrieben:

$$\underline{Z} = Z_0 e^{j\varphi} = R + jX.$$

Dabei sind Z_0 der sog. Scheinwiderstand, R der Wirkwiderstand und X der Blindwiderstand. Für eine leichtere Anwendung in verschiedenen Aufgaben geben wir eine Zusammenfassung der komplexen Größen eines Wechselstromkreises an:

$\underline{u}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t)$	Ohmsches Gesetz für Wechselstromkreise
$\underline{u}(t) = U_0 \cdot e^{j(\omega t)}$	komplexe Spannung
$\underline{i}(t) = I_0 \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}$	komplexe Stromstärke
$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = Z_0 \cdot e^{j\varphi} = R + jX$	komplexer Widerstand (Impedanz), von der Zeit unabhängig
$\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L \cdot e^{MIU \frac{\pi}{2}}$	komplexer induktiver Widerstand (Impedanz)
$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$	komplexer kapazitiver Widerstand (Impedanz)

Außerdem stellen wir die zuvor eingeführten komplexen Größen in Zeigerdiagrammen für Ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren in Abb. 4 dar.

Beispielaufgabe 7.3 (RLC-Reihenschaltung und Vergleich mit Pendel)

Bei Wechselstromkreisen mit mehreren Netzwerkkomponenten werden die Kirchhoffschen Regeln angewendet. Die Knotenregel besagt, dass die Summe aller zu- und abfließenden komplexen Ströme in einem Leitungsknoten ist Null:

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0.$$

Die Maschenregel besagt, dass die Summe aller komplexen Quellenspannungen entlang einer Leitungs-

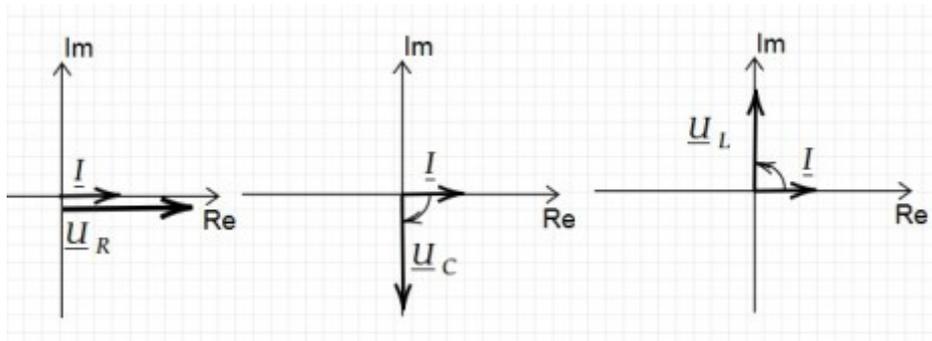


Abbildung 4: Die zum komplexen Schwingkreis gehörigen Zeigerdiagramme

masche gleich der Summe aller komplexen Lastspannungen ist:

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0.$$

Nun betrachtet man eine Reihenschaltung mit einem Ohmschen Widerstand R , einer Spule der Induktivität L und einem Kondensator der Kapazität C , an welcher eine Spannung $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ angelegt wird, siehe Abb. 5. Im Zeigerdiagramm von Abb. 5 werden die komplexen Spannungen $\underline{U}_R, \underline{U}_L, \underline{U}_C$,

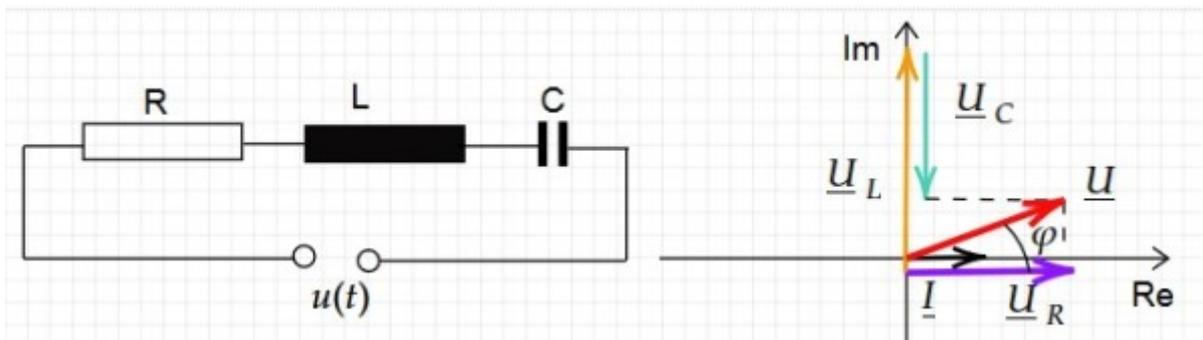


Abbildung 5: Wechselstromkreis mit RLC-Reihenschaltung und zug. Zeigerdiagramm

sowie der komplexe Strom \underline{I} dargestellt. Nach der Maschenregel gilt $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$. Nun wird die Addition dieser drei Spannungen mit dem obigen Verfahren in drei Schritten durchgeführt. Der Übergang zu komplexen Zeigern führt zu:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= U_0 e^{j(\omega t)}, \\ \underline{i}(t) &= I_0 \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = I_0 \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = \underline{I} \cdot e^{j(\omega t)}, \\ \underline{u}_R(t) &= I_0 \cdot R \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = I_0 \cdot R \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = R \cdot \underline{I} \cdot e^{j(\omega t)} = \underline{U}_R \cdot e^{j(\omega t)}, \\ \underline{u}_L(t) &= I_0 \cdot j\omega L \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = I_0 \cdot j\omega L \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = M I U \underline{U}_L \cdot e^{j(\omega t)}, \\ \underline{u}_C(t) &= -I_0 \cdot \frac{j}{\omega C} \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = -I_0 \cdot \frac{j}{\omega C} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = -j \underline{U}_C \cdot e^{j(\omega t)}. \end{aligned}$$

Nun addiert man die komplexen Zeiger $\underline{U}_R, \underline{U}_L$ und \underline{U}_C :

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = I_0 e^{-j\varphi} \cdot \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = I_0 e^{-j\varphi} \cdot \underline{Z} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$$

Die komplexe Impedanz \underline{Z} geben wir in algebraischer sowie in Polardarstellung an:

$$\underline{Z} = \frac{U_0}{I_0 e^{-j\varphi}} = Z_0 e^{j\varphi} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Mit der Euler'schen Formel lassen sich der Scheinwiderstand Z_0 , der Wirkwiderstand R und der Blindwiderstand X bestimmen:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z_0 e^{j\varphi} = Z_0 \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ \Rightarrow Z_0 &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \\ R &= Z_0 \cos \varphi, \quad X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z_0 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Man kann den Scheinwiderstand Z_0 und die Phasenverschiebung φ auch geometrisch, mit Hilfe des Zeigerdiagramms der komplexen Widerstände, bestimmen, siehe Abb. 6. Die RLC-Reihenschaltung eines

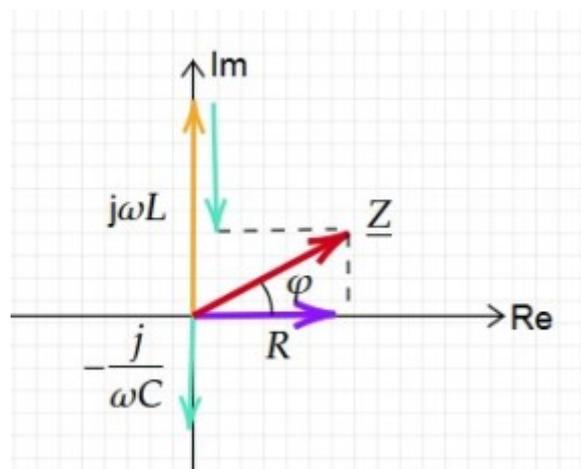


Abbildung 6: Bestimmung von Z_0 und φ mittels Zeigerdiagramm

Wechselstromkreises wird häufig als Analogon von harmonischen mechanischen Schwingern verwendet. Ein reales Feder-Masse-Pendel führt gedämpfte Schwingungen aus. Ein Teil seiner Energie wandelt sich in Wärme um, seine Amplitude nimmt ab. Im Weiteren wird die lineare viskose Dämpfung eines Feder-Masse-Pendels mit Hilfe von komplexen Zahlen behandelt. Die Viskosität eines Mediums, z. B. der Luft, ist die Eigenschaft dieses Mediums, eine Widerstandskraft der Form $F_R(t) = -k \cdot v(t)$ gegen die Geschwindigkeit eines beweglichen Körpers aufzubringen, wobei k die Dämpfungskonstante ist. Bei kleinen Werten der Dämpfungskonstante führt das Pendel schwach gedämpfte Schwingungen aus.

Wirkt eine harmonische Kraft $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$ auf das Pendel in Bewegungsrichtung, führt es Schwingungen mit der konstanten Kreisfrequenz ω der Kraft aus. Die Bilanz der Kräfte auf das Feder-Masse-Pendel hat große Ähnlichkeit mit der Summe der Spannungen einer RLC-Wechselstromschaltung: $L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = U_0 \cos(\omega t)$.

$$\text{Kräftebilanz des Feder-Masse-Pendels: } m \cdot a(t) + k \cdot v(t) + D \cdot x(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\text{Spannungssumme der RLC-Wechselstromschaltung: } L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = U_0 \cos(\omega t)$$

In jeder Gleichung wird nur eine physikalische Größe als Funktion der Zeit verwendet, wie z.B. $i(t)$ in der Gleichung der Spannungen der RLC-Schaltung. In der Gleichung des Schwingers wird die Geschwindigkeit $v(t)$ verwendet, indem $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ und $x(t) = \int v(t)dt$ sind. In der folgenden Tabelle findet man den Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen des mechanischen Schwingers, bzw. des RLC-Wechselstromkreises.

Feder-Masse-Pendel	RLC-Reihenschaltung
$F_T(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{d(v(t))}{dt}$ Trägheitskraft	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ Spannung an der Spule
$F_D(t) = k \cdot v(t)$ Viskositätskraft	$u_R(t) = R \cdot i(t)$ Spannung am Widerstand
$F_R(t) = D \cdot x(t)$ Rückstellkraft	$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ Spannung am Kondensator
$v(t)$ Geschwindigkeit des Schwingers	$i(t)$ Stromstärke in der Schaltung
$x(t)$ Elongation des Schwingers	$q(t)$ elektrische Ladung
m Masse des Schwingers	L Induktivität der Spule
k Dämpfungskonstante	R Ohmscher Widerstand
D Federkonstante	$\frac{1}{C}$ Kehrwert der Kapazität

Jeder harmonischen Kraft kann man einen komplexen Zeiger zuordnen. Die Trägheit des Schwingers, sowie die Härte der Feder verursachen in der Regel eine Phasenverschiebung zwischen der äußeren Kraft des Erregers $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$ und der Geschwindigkeit des Schwingers $v(t) = V_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Der Übergang zur komplexen Darstellung führt zu:

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &= F_0 e^{j(\omega t)}, \\ \underline{v}(t) &= V_0 \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = V_0 \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = \underline{V} \cdot e^{j(\omega t)} \\ \underline{F}_T(t) &= V_0 \cdot j\omega m \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = I_0 \cdot j\omega m \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = MIU\underline{F}_T \cdot e^{j(\omega t)} \\ \underline{f}_D(t) &= V_0 \cdot k \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = V_0 \cdot k \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = k \cdot \underline{V} \cdot e^{j(\omega t)} = \underline{F}_D \cdot e^{j(\omega t)}; \\ \underline{f}_R(t) &= -V_0 \cdot \frac{jD}{\omega} \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} = -V_0 \cdot \frac{jD}{\omega} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} = -j\underline{F}_R \cdot e^{j(\omega t)} \end{aligned}$$

Durch die Addition der komplexen Kräfte-Zeiger kann man die Geschwindigkeit des Pendels bestimmen.

$$\underline{F}_0 = \underline{F}_T + \underline{F}_D + \underline{F}_R = V_0 e^{-j\varphi} \cdot \left[k + j \left(\omega m - \frac{D}{\omega} \right) \right] = V_0 e^{-j\varphi} \cdot \underline{Z} = \underline{V} \cdot \underline{Z},$$

wobei \underline{Z} die Bedeutung einer "Impedanz" des mechanischen Schwingers hat. \underline{V} ist die komplexe Geschwindigkeit des Pendels. Die Phasenverschiebung der Kraft des Erregers bezüglich zur Geschwindigkeit des Pendel ist gegeben durch

$$\varphi = \arctan \frac{(\omega m - \frac{D}{\omega})}{k}$$

Die Geschwindigkeit des Pendels ist

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{wobei } V_0 = \frac{F_0}{\sqrt{k^2 + (\omega m - \frac{D}{\omega})^2}}$$

Beispielaufgabe 7.4 (RLC-Parallelschaltung)

Der Wechselstromkreis mit parallel geschaltetem Widerstand R , Spule L und Kondensator C wird ebenfalls mit der Hilfe komplexer Zahlen gelöst. Die komplexen Zweigströme werden nach den Kirchhoffschen Knotenregel addiert, siehe Abb. 7. Die Stromstärke der Stromquelle $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ ist die Summe der Zweigströme:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t).$$

Der komplexe Spannungszeiger ist identisch an den Netzbauteilen R , L , C in der Parallelschaltung. Damit ergibt sich

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j\omega L} + \underline{U} \cdot j\omega C$$

Die Induktivität und die Kapazität der Schaltung verursachen eine Phasenverschiebung des Stroms

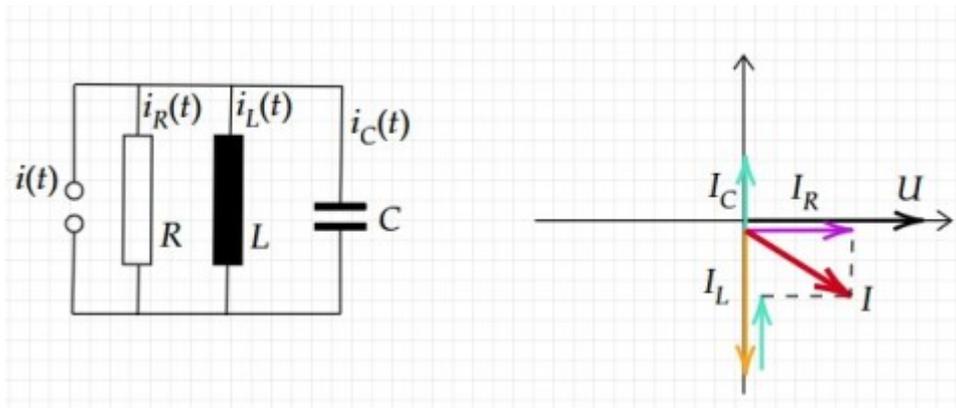


Abbildung 7: Wechselstromkreis mit RLC-Parallelschaltung und zug. Zeigerdiagramm

zur Spannung. Man addiert die Kehrwerte der komplexen Reaktanzen $\underline{Z}_L = j\omega L$, $\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$ sowie des Ohmschen Widerstands nach derselben Regel wie die Widerstände im Gleichstromkreis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C \right) \\ \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)} = \frac{\frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)}{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} \end{aligned}$$

Der Scheinwiderstand, sowie die Phasenverschiebung φ werden mit dem Realteil und mit dem Imaginärteil der komplexen Impedanz berechnet:

$$\frac{1}{Z_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} ; \varphi = \arctan R \cdot \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C \right).$$