Dr. Timo Essig, Dr. Marinela Wong
timo.essig@kit.edu, wong@hw-schule.de

Aufgabenblatt 7 **Anwendungen zu komplexen Zahlen**

Achtung: Auf diesem Blatt schreiben wir die komplexe Einheit als „j“anstatt als „i“.

Aufgabe 7.1 (Die Eulersche Formel)
Auf Beispiel- und Aufgabenblatt 6 haben wir die Polardarstellung von komplexen Zahlen eingeführt. Kurz gesagt lässt sich so jede komplexe Zahl $0 \neq z \in \mathbb{C}$ eindeutig schreiben als

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)), \quad r \in (0, \infty),\ \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Ist eine komplexe Zahl $0 \neq z = x + \mathrm{j}y \in C$ gegeben, so kann man r und φ wie folgt berechnen (wobei $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ die Umkehrfunktion des Kosinus ist):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{falls } y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Um noch einfacher mit der Polardarstellung rechnen zu können, führen wir zusätzlich noch die Darstellung über die komplexe Exponentialfunktion ein. Nach der sogenannten **Eulerschen Formel** lässt sich eine komplexe Zahl in Polardarstellung wie folgt schreiben:

$$r(\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)) = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{e} \approx 2,718$ die sogenannte Eulersche Zahl. Wenn wir die komplexe Zahl so schreiben, können wir Potenzgesetze (die auch für beliebige komplexe Exponenten gelten) verwenden, um komplexe Zahlen zu multiplizieren:

$$(r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) \cdot (s \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}) = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi + \mathrm{j}\psi} = rs \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi+\psi)} \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen $\mathrm{e}^{\mathrm{j}z_i}$ für nachfolgende z_i. (Achtung: Die Eulersche Formel gilt nur für Exponenten der Form $\mathrm{j}\varphi$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$.)

(i) $z_1 = \frac{\pi}{6}$, (ii) $z_2 = \pi + \mathrm{j}$, (iii) $z_3 = \frac{\pi}{4} - 2\mathrm{j}$.

b) Zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ sind genau dann gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen, d.h. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. Benutzen Sie diese Aussage zusammen mit Gleichung (1) mit $r = s = 1$, um die Additionstheoreme

$$\sin(\varphi \pm \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) \pm \cos(\varphi)\sin(\psi),$$
$$\cos(\varphi \pm \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) \mp \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus zu beweisen.

Bemerkung: Wir beweisen hier weder die Eulersche Formel, noch geben wir die genaue Definition der Exponentialfunktion an. Wir wollen uns lediglich darauf beschränken, deren Anwendungen zu untersuchen.

Aufgabe 7.2 (Spule im Wechselstromkreis)
Das Wechselstrom-Modell einer realen Spule ohne Eisenkern wird häufig als Reihenschaltung ihrer Induktivität L und ihres von den Kupferwicklungen verursachten Ohmschen Widerstands R_L betrachtet. Durch das Anlegen einer Gleichspannung an die Spule wurde einen Widerstandswert von $R_L = 3\Omega$ ermittelt. Wird die Spule an einer Wechselspannungsquelle mit der Effektivspannung $U_{eff} = 10V$ und mit der Frequenz $f = 50Hz$ angeschlossen, so wird einen Scheinwiderstand $Z_0 = 5\Omega$ bestimmt.

a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der realen Spule, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm.

b) Bestimmen Sie die Induktivität der Spule.

c) Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen den Strom und der angelegten Spannung?

Die Induktivität L der Spule kann durch die Verwendung eines Eisenkernes vergrößert werden. Im Eisenkern entstehen aber Hysterese- oder Wirbelstromverluste, die man mit einem im parallel zur idealen Induktivität L der Spule geschalteten Widerstand R_H berücksichtigt. Die neue Induktivität mit Eisenkern ist nun $L_1 = 120mH$, und der Widerstandswert verursacht von den oben genannten Verlusten ist $R_H = 10\Omega$.

d) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der realen Spule mit Eisenkern, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm.

e) Bestimmen Sie den neuen Scheinwiderstand der Spule, sowie die Phasenverschibung zwischen der Wechselspannung und dem Strom.

Aufgabe 7.3 (Kondensator im Wechselstromkreis)
Reale Kondensatoren weisen unerwünschte parasitäre Effekte auf, die die Kapazität negativ beeinflussen. Dazu gehört der Isolationswiderstand des Dielektrikums R_D, der nicht unendlich groß ist, und die Selbstentladung des aufgeladenen Kondensators verursacht. Das Ersatzschaltbild eines realen Kondensators besteht aus einem kapazitiven Blindanteil X_C parallel zu einem Wirkanteil R_D. Gegeben ist einen Kondensator der Kapazität $C = 1\mu F$, angeschlossen an einer Wechselspannungsquelle mit der Frequenz $f = 50Hz$. Der experimentell bestimmten Scheinwiderstand beträgt $Z_0 = 3181,5\Omega$.

a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des realen Kondensators, sowie das zugehörige Zeigerdiagramm.

b) Bestimmen Sie den Isolationswiderstand des Dielektrikums R_D.

c) Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der angelegten Spannung?

Aufgabe 7.4 (Zweigströme – Effektivwerte)
Eine Schaltung mit $L_1 = 100mH$, $L_2 = 20mH$, $R = 50\Omega$ und $C = 80\mu F$ wird wie in der Abb. 7.4 an einer Wechselspannungsquelle mit $U_{eff} = 10V$ und $f = 50Hz$ angeschlossen.

a) Bestimmen Sie die komplexe Impedanz, sowie den Scheinwiderstand der Schaltung.

b) Geben Sie die Zweigströme I_1, I_2 und I_3 in komplexer Darstellung sowie die Effektivwerte an.

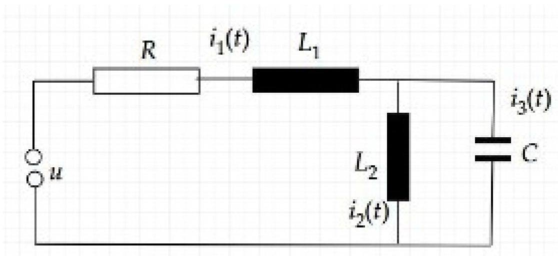

Abb 7.4: Schaltbild

Aufgabe 7.5 (Zweigströme – Scheitelwerte)

Bekannt sind R, L und C der folgenden Schaltung (Abb. 7.5), sowie die Scheitelwerte der Wechselspannungen zweier Spannungsquellen derselben Frequenz f, und ohne Phasenunterschied voneinander, U_1 und U_2. Bestimmen Sie die Zweigströme in komplexer Darstellung und ihre Scheitelwerte durch die Anwendung der Kirchoffschen Gesetze.

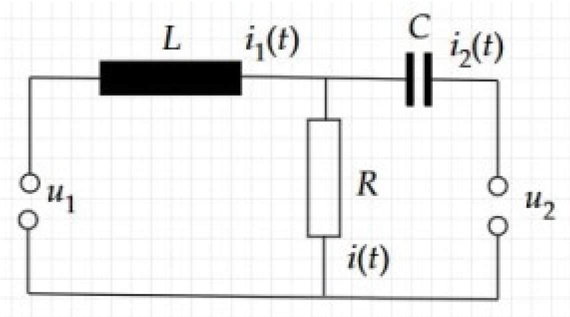

Abb 7.5: Schaltbild