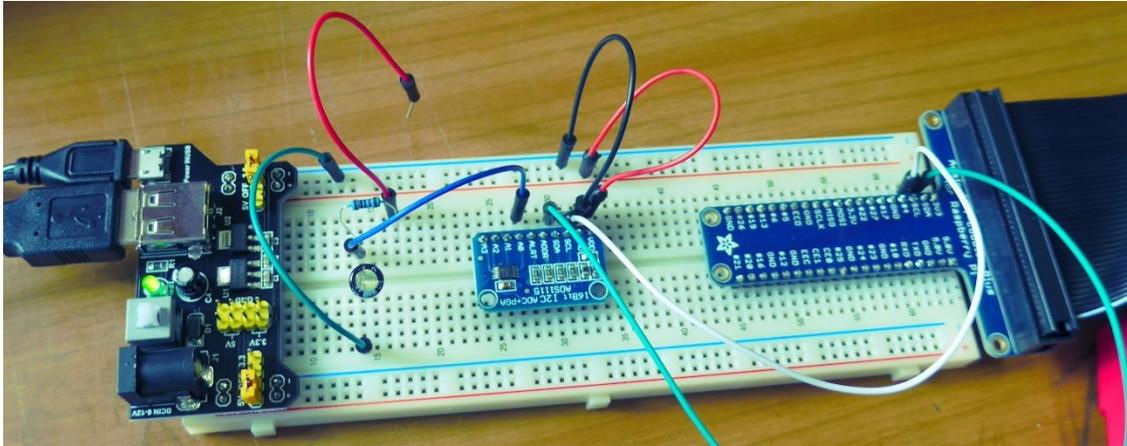


## Aufzeichnung, Visualisierung und Auswertung des Auflade- und Entladevorgangs eines Kondensators mit dem Analog-Digitalwandler ADS1115 und Messwerterfassungssystem PhyPiDAQ



*Abb.1 Die Grundidee des Versuchs bezieht sich auf die Untersuchung des Auflade- und Entladevorgangs eines elektrolytischen Kondensators, der über einen Widerstand an die 3,3V-Spannung des Raspberry Pi angeschlossen ist.*

Das Aufladen und Entladen eines Elektrolytkondensators wird über einen am +3,3V Pin des Raspberry Pi in Reihen angeschlossenen ohmschen Widerstand untersucht. In einer Einführungsvariante erfolgt das abwechselnde Laden und Entladen über das Umstecken des Kabels am Pluspol des Widerstands zwischen 3,3V und Erdung, wie in der Abb.1. In einem zweiten Versuch wird eine Rechteckspannung auf zwei GPIO-Pins vom Raspberry Pi durch Beleuchten/Abdecken eines LDR-Fotowiderstands erzeugt. Bei dieser Hell-Dunkelschaltung wird die Spannung am Kondensator erneut visualisiert und aufgezeichnet.

### Ziele

- Entwerfen und Aufbauen elektrischer Schaltungen durch das zielgerichtete Anordnen der elektrischen Komponenten und des Raspberry Pi.
- Aufstellen der .daq- sowie der .yaml-Konfiguration des Experiments und des ADC-Wandlers zum Zweck des Versuchs;
- Aufzeichnung, Visualisierung und Auswertung des Lade- und Entladevorgangs verschiedenen Kondensatoren, sowie ihrer Reihen- und Parallelschaltungen.
- Untersuchung des Spannungs- und des Stromverlaufs an einem Kondensator während des Lade- und Entladevorgangs.
- Untersuchung der physikalischen Größen, die die Geschwindigkeit des Auflade- und Entladevorgangs beeinflussen.
- Bewertung des zeitlichen Energieverlaufs während des Lade- und Entladevorgangs am Kondensator.



- Nutzung der Messdaten im Mathematikunterricht zur Modellierung exponentieller verlaufender Vorgänge, Anbindung des Mathematikunterrichtes an die Realität.

## Fragen und Aufgaben

### I. Aufbau des Versuchs

- I.1 Zeichnen Sie die Schaltskizze einer simplen Schaltung mit einem elektrolytischen Kondensator, der sich über einen am +3,3V-Pol (oder +5V) des Raspberry Pi angeschlossen Widerstand auflädt.
- I.2 Bauen Sie den Stromkreis mit einem elektrolytischen Kondensator der Kapazität  $C=10\mu\text{F}$  und mit einem ohmschen Widerstand  $R=47\text{k}\Omega$  nach dem Schaltplan auf. Beachten Sie, dass die elektrolytischen Kondensatoren polarisierte Kondensatoren sind, deren Anode mit positiver Spannung gegenüber der Kathode betrieben werden muss. Welche Beobachtungen machen Sie an einem am Kondensator angeschlossen Voltmeter während des Ladevorgangs?
- I.3 Untersuchen Sie die Bauarten und Eigenschaften von Elektrolytkondensatoren und formulieren Sie eine Vermutung über das Anlegen einer Umpolspannung (Falschspannung) an einem Elektrolytkondensator mit festem Elektrolyten.
- I.4 Das abwechselnde Laden und Entladen des Kondensators erfolgt über das Umstecken des Kabels am Pluspol des Widerstands zwischen 3,3V und Erdung. Welche Beobachtungen machen Sie über den zeitlichen Verlauf der zuerst mit einem Voltmeter gemessenen Spannung am Kondensator?
- I.5 Nun wird die Spannung am Kondensator mit Hilfe des Analog Digital Wandlers ADS1115 digitalisiert und gemessen. Besprechen Sie mit Ihrem Partner die Beschaltung und die Pinbelegung des ADS1115-Wandlers in diesem Versuch.
- I.6 Erstellen Sie selber Ihren Schaltplan mit der freien Software *Fritzing*.
- I.7 Wenn Sie den Schaltplan noch nicht entworfen haben, gehen Sie von der in der Abb.1 gezeigte Schaltung aus. Wie wird der ADS1115 angeschlossen und wie wird die Spannung am Kondensator gemessen?
- I.8 In der Schaltung mit elektrolytischem Kondensator und mit ohmschem Widerstand wird eine Änderung vorgenommen, so dass auch der Ladestrom  $I(t)$  mit Hilfe des ADC-Wandlers gleichzeitig mit der Spannung  $U_C(t)$  gemessen werden kann. Besprechen Sie diese Änderung mit Ihrem Partner.
- I.9 Im folgenden Versuch wird eine Hell-Dunkelschaltung durch das Beleuchten/Abdecken eines LDR-Fotowiderstands erzeugt. Eine Rechteckspannung auf zwei GPIO-Pins vom Raspberry Pi wird produziert. Der entsprechende *Fritzing*- Schaltplan wird in der Abb.I.1 gezeigt. Zeichnen Sie eine Schaltskizze dieser Schaltung und besprechen Sie mit Ihrem Partner die Rolle jedes Bauteils für die Durchführung des Versuchs.



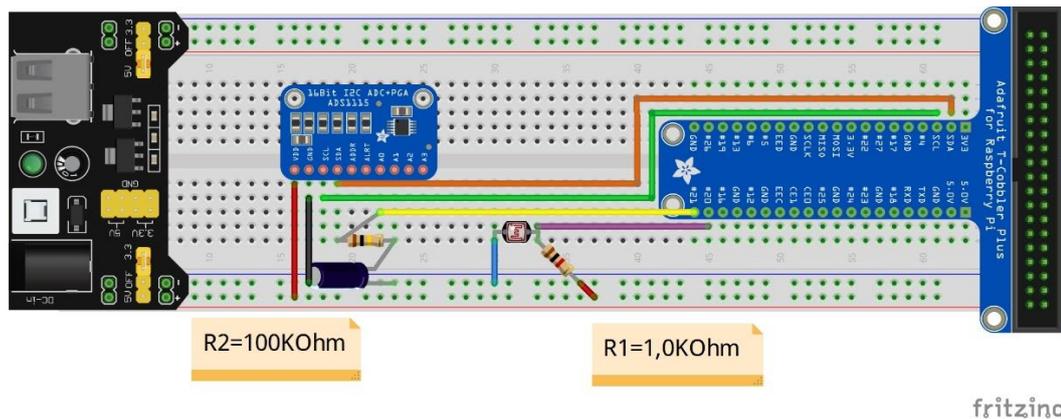


Abb.I.1 Hell-Dunkelschaltung mit einem LDR-Fotowiderstand zur Erzeugung einer Rechteckspannung  $U(t)$ .  $U_C(t)$  wird mit dem ADC-Wandler digitalisiert und gemessen.

II. Nachdem die Experimentieranordnung vollständig fertig ist, muss man den Versuch in **PhyPiDAQ- Messwerterfassungssystem konfigurieren**.

II.1 Bauen Sie die einfache Schaltung nach der Abb.1 mit einem elektrolytischen Kondensator der Kapazität  $C=10\mu\text{F}$  und mit einem ohmschen Widerstand  $R=47\text{k}\Omega$  auf. Schließen Sie den ADC-Wandler an und verbinden Sie die Schaltung an +3,3V (oder +5V) und Erdung GND. Besprechen Sie die notwendige .yaml-Konfiguration des ADC-Wandlers und die .daq-Konfiguration des Versuchs zur Messung der Spannung am Kondensator  $U_C(t)$  mit Ihrem Partner.

II.2 Nun wird eine Änderung in der Schaltung so gemacht, dass man die Spannung  $U_C(t)$  und  $U_R(t)$  am Widerstand auf zwei Kanäle des ADC-Wandlers gleichzeitig misst. In der .daq-Konfiguration des Versuchs kann man die Formel der Ladung  $Q=C \cdot U_C(t)$  sowie die Ohm'sche Formel  $I=\frac{U_R}{R}$  eingeben, damit die elektrische Ladung  $Q(t)$  sowie der Ladestrom  $I(t)$  direkt visualisiert werden kann. Die Messbereiche, Größen und Maßeinheiten muss man auch entsprechend eingeben.

Untersuchen Sie ganz genau die Änderung in der elektronischen Schaltung, erklären Sie die notwendige .yaml-Konfiguration des Wandlers, ob er direkt oder differentiell misst, und die notwendige Auswahl der Befehle und Anpassungen in der .daq-Konfiguration des Versuchs. Die Lösung findet man unter dem Link:

<http://www.hw.pf.bw.schule.de/joomla/index.php/bildungsangebote/berufsschule?id=257>

II.3 Durch das Beleuchten/Abdecken des LDR-Fotowiderstands wird eine Rechteckspannung auf den 20ten und 21ten GPIO-Pin vom Raspberry Pi produziert, wie in der Abb.I.1 gezeigt. Für die Erzeugung dieser Spannung wird eine in *python* programmierte Anwendung im Hintergrund ausgeführt. Die GPIO-In-Out.py -Anwendung findet man in *examples*-Datei der PhyPiDAQ-Software. Schauen Sie sich den *python* Code an, und erklären Sie die GPIO-Steuerung durch die Beleuchtung des LDRs. Erläutern sie auch die



.daq- und .yaml-Konfiguration dieses Versuchs. Lösung findet man unter den oben genannten Link.

Ist die Konfiguration des Versuchs fertig, kann man die erste Messung beginnen. Dazu drücken Sie *StartRun* unten rechts auf dem Hauptfenster des PhyPiDAQ-Messwerterfassungssystems.

### III. Fragen und Aufgaben zu physikalischen Messungen

#### III.1 Qualitative Fragen zur Lade- und Entladekurve eines Elektrolytischen Kondensators

##### Lade- Entladekurve Kondensator C=10mikroF

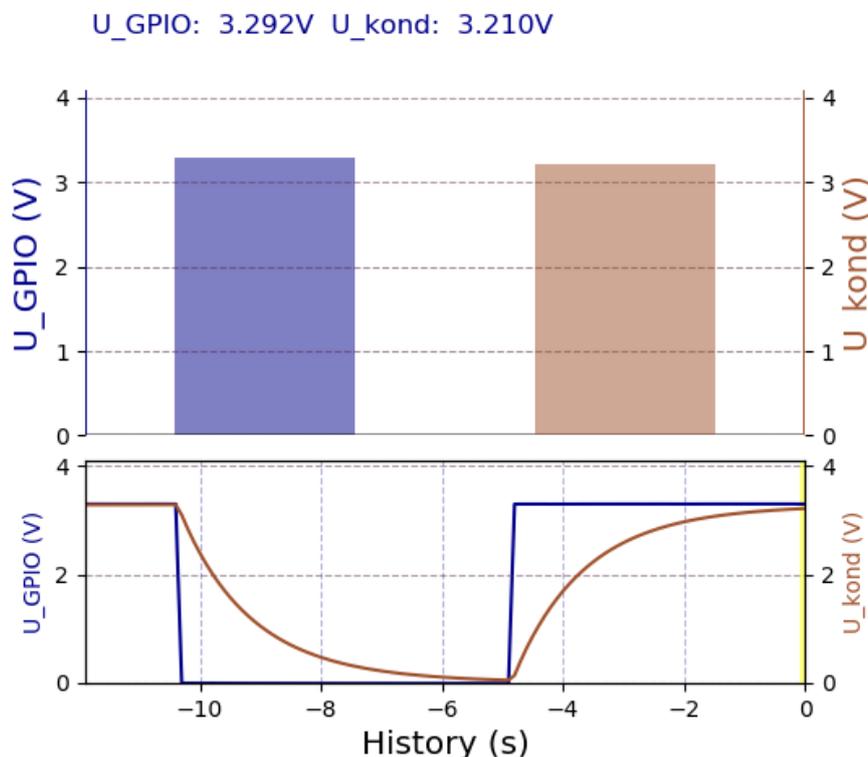


Abb.III.1.1 Die Rechteckspannung  $U_{GPIO}(t)$  sowie die Spannung am Kondensator  $U_{kond}(t)$  wird aufgezeichnet und im PhyPiDAQ-Diagrammfenster in Echtzeit dargestellt.

III.1.1 Ausgehend von der Darstellung der Spannung am Kondensator im PhyPiDAQ-Diagrammfenster erklären Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator beim Auflade- und Entladevorgang. Warum steigt die Spannung  $U_C(t)$  beim Aufladen sehr schnell an, dann wird sie immer langsamer, bis kein Fortschritt mehr erkennbar ist? Dieselbe Frage beim Entladen des Kondensators?



III.1.2 Der zeitliche Verlauf der Spannung  $U_C(t)$  entspricht keiner linearen Funktion. Geben Sie begründet einen Funktionsterm für den zeitlichen Verlauf der Spannung  $U_C(t)$  beim Auflade- und Entladevorgang an.

III.1.3 Im Diagrammfenster lässt sich die Dauer des Lade- und der Entladevorgangs messen. Welche Vermutung über ein vollständiges Aufladen/Entladen des Kondensators lässt sich formulieren?

III.1.4 Welche physikalischen Größen beeinflussen die Dauer des Lade- und des Entladevorgangs?

III.1.5 Wie verändert sich der Verlauf der Lade- und Entladekurve, wenn

- a) C wird größer, aber R bleibt gleich;
- b) R wird größer, aber C bleibt gleich

III.1.5 Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem man in der vorhandenen Schaltung auf dem Breadboard den ursprünglichen Kondensator mit einem Kondensator der größeren Kapazität ersetzt, bzw. den ursprünglichen Widerstand mit einem größeren Widerstand ersetzt. Soll man auch eine Änderung in der .daq-Konfiguration des Versuchs vornehmen?

III.1.6 In der Abb.III.1.2 wird die durch die Schalttaste SaveGraph im PhyPiDAQ-Diagrammfenster gespeicherte Ladekurve eines unbekanntenen Kondensators dargestellt.

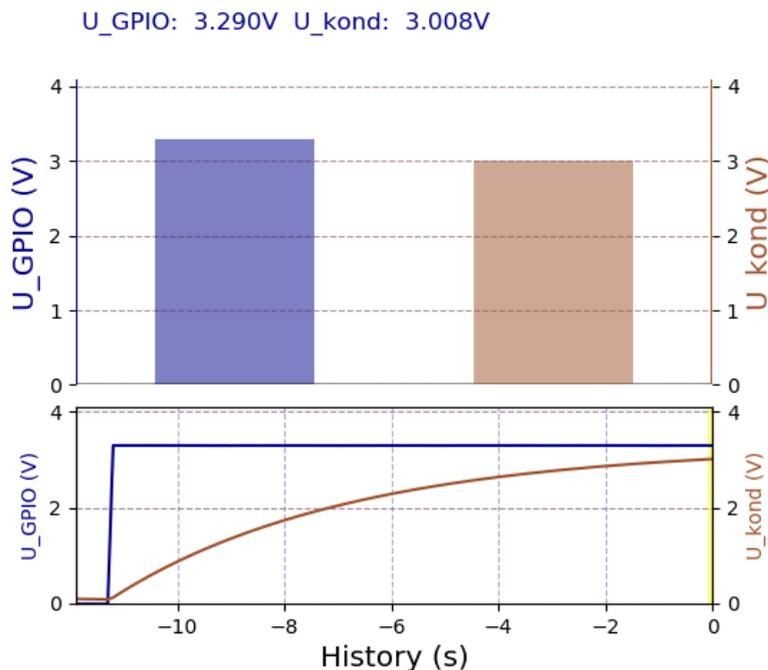


Abb.III.1.2 Ein neuer zeitlicher Verlauf der Spannung an einem unbekanntem Kondensator  $U_{\text{kond}}(t)$  dargestellt in Echtzeit im PhyPiDAQ-Diagrammfenster.

Vergleichen Sie die Dauer des Aufladens in Abb.III.1.2 und Abb.III.1.1 miteinander und geben Sie begründet an, welche der zwei Kondensatoren eine größere Kapazität hat.



III.1.7 Welche Veränderung soll man in der .daq-Konfiguration vornehmen, damit die Lade- und die Entladekurve bei größeren Kapazitäten gleichzeitig im PhyPiDAQ-Diagrammfenster erscheinen?

III.1.7 Ausgehend vom zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator in der Abb.III.1.1 oder Abb.III.1.2 erläutern Sie eine zeichnerische Methode zur Ermittlung des Lade-, bzw. des Entladestroms eines Kondensators.

III.1.8 Wenn die Definitionsformel der Stromstärke als Differentialquotient der Ladung  $Q$  bekannt ist,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

leiten Sie die Formel der Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung am Kondensator her.

III.1.9 Nun betrachtet man die Ladekurve des elektrolytischen Kondensators in der Abb.III.1.2. Zeichnen Sie die Tangenten am Graphen der Spannung am Kondensator  $U_C(t)$  an  $t_1=10s$ ,  $t_2=8s$ ,  $t_3=6s$ ,  $t_4=4s$  und  $t_5=2s$ . Vergleichen Sie die Steigungen dieser Tangenten. Interpretieren Sie physikalisch die fallende Werte der Steigungen. Ordnen Sie eine physikalische Größe der Steigung der Tangente an einem Zeitpunkt zu.

III.1.10 Vergleichen Sie Werte der Steigung der Tangenten an der Entladekurve des Kondensators in der Abb.III.1.1. Welche Richtung hat der Entladestrom? Interpretieren Sie den zeitlichen Verlauf des Entladestroms.

III.1.11 Ausgehend von den Steigungswerten der Tangenten an der Lade- und Entladekurve des Kondensators skizzieren Sie den zeitlichen Stromverlauf  $I(t)$ . Vergleichen Sie Ihre Skizze mit dem in Echtzeit aufgezeichneten Verlauf von  $I(t)$  und  $U_C(t)$  in PhyPiDAQ-Diagrammfenster.

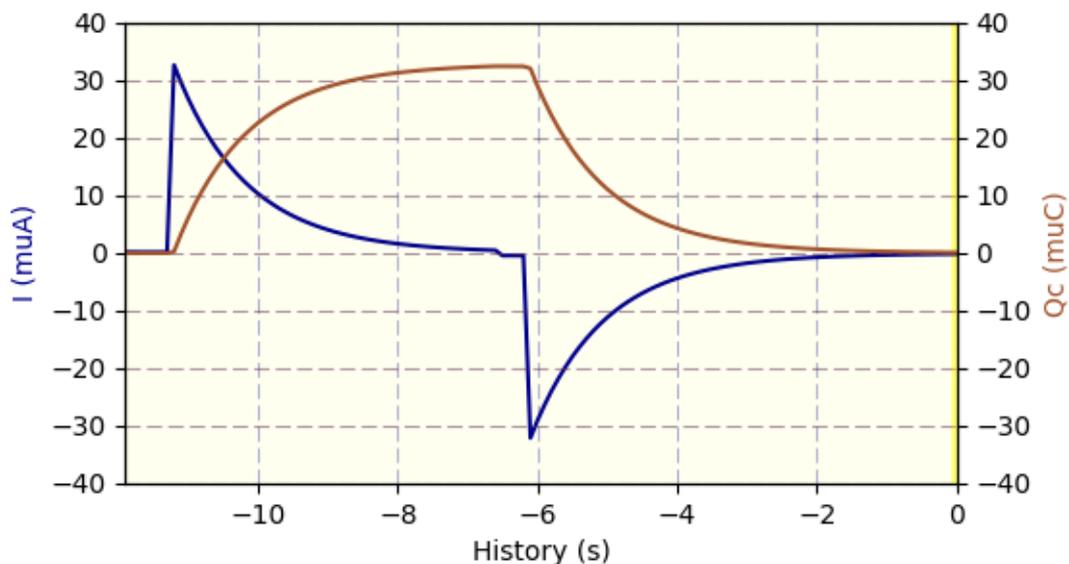


Abb.III.1.3 Zeitlicher Verlauf der Stromstärke  $I(t)$  und der Ladung am Kondensator  $Q(t)$  während des Auflade- und Entladevorgangs des Kondensators





III.1.12 Besprechen Sie die Schaltung, sowie die Konfiguration des Versuchs zur Aufzeichnung und Visualisierung des Bildes in der Abb.III.1.3.

III.1.13 Nun werden zwei Kondensatoren derselben Kapazität  $C=10\mu\text{F}$  in Reihe geschaltet. Besprechen Sie mit Ihrem Partner die erwartete Änderung in der Lade- und Entladekurve  $U_C(t)$  der Reihenschaltung. Skizzieren Sie diese Kurven und vergleichen Sie diese mit der im PhyPiDAQ-Diagrammfenster dargestellte Kurve. Eine momentane Aufnahme wird in der Abb.III.1.4 gezeigt. Interpretieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit der gelernten Formel der Gesamtkapazität einer Reihenschaltung von Kondensatoren. Wiederholen Sie den Versuch für eine Parallelschaltung der zwei Kondensatoren derselben Kapazität  $C=10\mu\text{F}$ . Eine momentane Aufnahme wird in der Abb.III.1.5.

III.1.14 Die Formel des Gesamtwiderstands zweier in Reihe oder in Parallel geschalteten Widerstände lässt sich auch mit diesem Versuch untersuchen. Diskutieren Sie den zeitlichen Verlauf des Lade- und des Entladevorgangs für jede dieser Schaltungen. Stecken Sie den zweiten Widerstand auf dem Breadboard und führen Sie den Versuch durch. Vergleichen Sie die erhaltenen Kurven.

### Lade- Entladekurve Kondensator in Reihe $C=10\text{mikroF}$

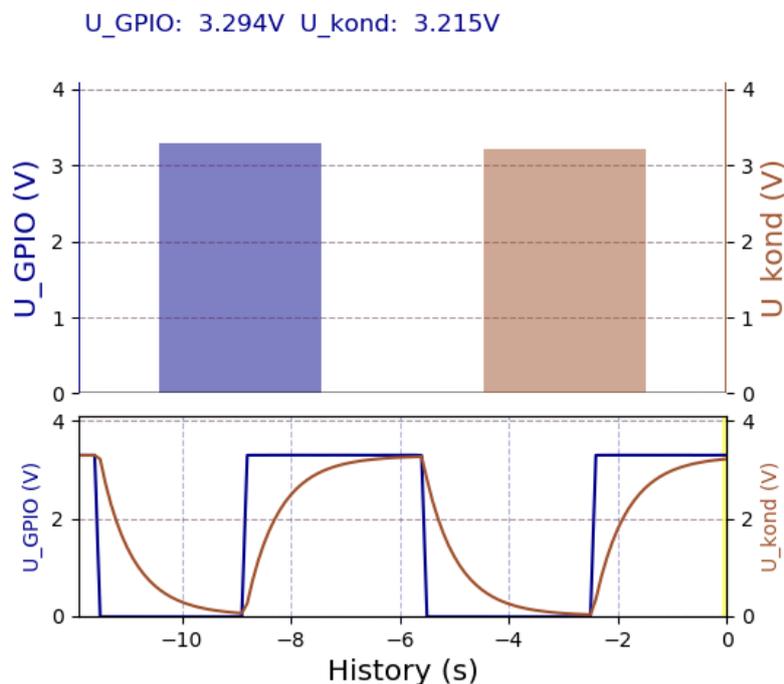


Abb.III.1.4 Lade- und Entlade Kurve einer Reihenschaltung zweier Kondensatoren der Kapazität  $C=10\mu\text{F}$ .





## Lade- Entladekurve Kondensator Parallel C=10mikroF

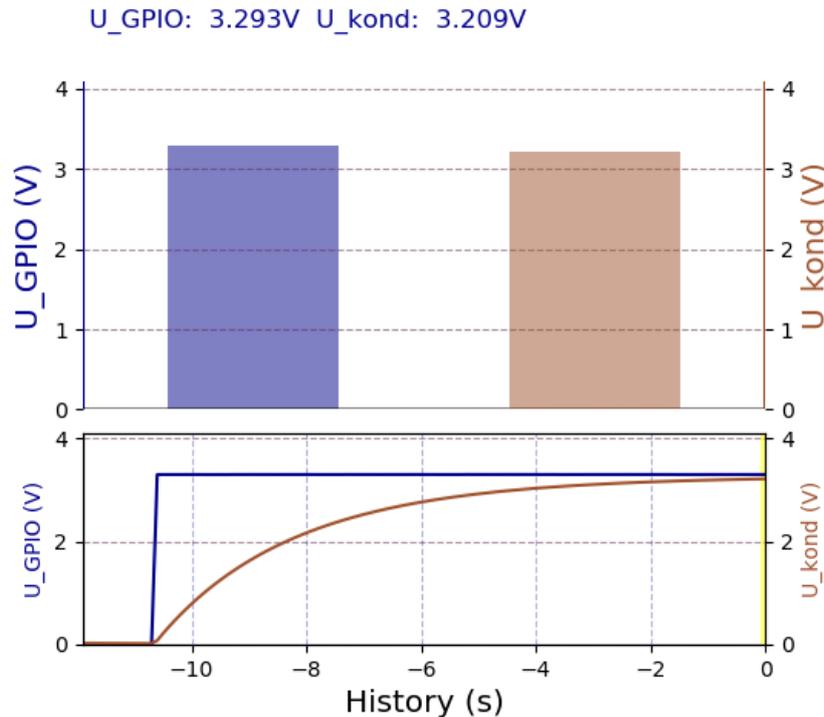


Abb.III.1.5 Ladekurve einer Reihenschaltung zweier Kondensatoren der Kapazität  $C = 10\mu\text{F}$ .

### III.2 Quantitative Fragen zur Lade- und Entladekurve eines Elektrolytischen Kondensators

III.2.1 Der zeitliche Verlauf der Spannung beim Entladen des Kondensators lässt sich mit der folgenden Exponentialfunktion modellieren:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

Erläutern Sie die physikalischen Größen und deren Maßeinheiten im Funktionsterm  $U_C(t)$ . Klären Sie das Vorzeichen der Abnahmekonstante  $k$ . Wie hängt der Wert der Abnahmekonstante von der Kapazität des Kondensators sowie vom Widerstandswert. Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch das Stecken verschiedener Kondensatoren und Widerstände in der Schaltung auf dem Breadboard.

III.2.2 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Überprüfen Sie Ihre Aussage mit dem zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator im PhyPiDAQ-Diagrammfenster.

- Je größer die Kapazität des Kondensators desto kleiner ist die Abnahmekonstante  $k$ ;
- Je kleiner der Widerstandswert, desto größer ist die Abnahmekonstante  $k$ ;

III.2.3 Man zieht eine Tangente an der Entladekurve eines elektrolytischen Kondensators wie in der Abb.III.2.1 gezeigt. Geben Sie die Gleichung der Tangente an der Entladekurve des Kondensators zum Zeitpunkt  $t = 0\text{s}$  betrachtet als die Zeit zum Beginn des Entladevorgangs.



Der Kondensator ist vollgeladen zu diesem Zeitpunkt. Die Spannung  $U_0$  am Kondensator ist die Spannung an den GPIO-Pins des Raspberry Pis.

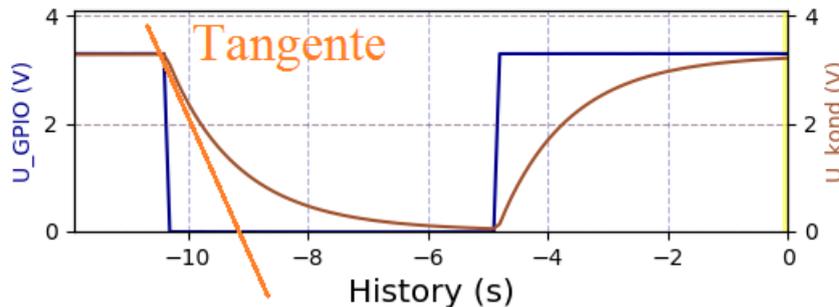


Abb.III.2.1 Tangente an der Entladekurve zur Bestimmung der Zeitkonstante  $\tau$

III.2.4 Die Gleichung der Tangente zum Beginn des Entladevorgans bei  $t = 0$ s ist

$$U_{Tangente} = U_0 \cdot k \cdot t + U_0$$

Wie kann man den Wert der Abnahmekonstante  $k$  zeichnerisch in der Abb.III.2.1 bestimmen?

III.2.5 Die Physikalische Bedeutung der Abnahmekonstante  $k$  deutet darauf hin, dass der Betrag von  $k$  der Kehrwert einer Zeitkonstante  $\tau$  ist. Geben Sie den Funktionsterm für die exponentielle Abnahme der Spannung  $U_C(t)$ , indem man die Zeitkonstante  $\tau$  als positive Größe im Exponenten betrachtet.

III.2.6 Beantworten Sie die Fragen der Aufgabe III.2.2, wenn man  $U_C(t)$  mit Hilfe der Zeitkonstante  $\tau$  ausdrückt. Überprüfen Sie Ihre Aussage durch schnelle Durchführung des Versuchs mit der LDR-Hell-Dunkelschaltung mit unterschiedlichen Kondensatoren und Widerständen.

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

III.2.7 Nun suchen wir nach dem mathematischen Zusammenhang zwischen der Zeitkonstante  $\tau$  und den physikalischen Größen der elektrischen Komponenten der Schaltung. Dazu multiplizieren wir die obige Spannung am Kondensator mit seiner Kapazität  $C$  und bekommen wir die elektrische Ladung  $Q(t)$  am Kondensator als Funktion der Zeit:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Leiten Sie die Funktion  $Q(t)$  einmal ab und interpretieren Sie die entstandene Gleichung.

III.2.8 Der Entladestrom  $I(t)$  fließt durch den in Reihe zum Kondensator angeschlossenen Widerstand  $R$  und transportiert Ladungen vom Kondensator weg. Geben Sie den Funktionsterm des zeitlichen Verlaufs des Entladestroms. Interpretieren Sie sein Vorzeichen. Vergleichen Sie den gefundenen Funktionsterm für  $I(t)$  mit dem im PhyPiDAQ-Diagrammfenster dargestellten Verlauf. Die dazu gehörige momentane Aufnahme ist in der Abb.III.1.3 gezeigt.



III.2.9 Gegeben ist die folgende Gleichung:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Wie entsteht diese Gleichung? Welche Bedeutung hat das Minus-Vorzeichen? Interpretieren Sie den Zusammenhang zwischen der beweglichen Ladung durch den Widerstand und der gespeicherten Ladung am Kondensator.

III.2.10 Die obige Gleichung lässt sich umformen, indem man die elektrische Stromstärke in Abhängigkeit von dem Spannungsabfall am Widerstand  $U_R$  einsetzt. Die elektrische Ladung  $Q(t)$  hängt von der momentanen Spannung  $U_C(t)$  ab. Interpretieren Sie die Gleichung, die durch diese Umformungen entsteht.

III.2.11 In der experimentellen Reihenschaltung vom Kondensator und Widerstand gilt nach der 2. Kirchhoffschen Regel (Maschensatz):

$$U_R + U_C = U_0$$

Vergleichen Sie die diese Gleichung mit der von Ihnen hergeleiteten Gleichung bei der Frage III.2.10, und bestimmen Sie die Zeitkonstante  $\tau$ .

III.2.12 Gegeben ist die folgende Gleichung:

$$\frac{U_R(t)}{R} = -\frac{C \cdot U_C(t)}{\tau}$$

Wie entsteht diese Gleichung aus der Gleichung der Aufgabe III.2.9? Wie lässt sich die Zeitkonstante  $\tau$  daraus bestimmen?

III.2.13 Die Abb.III.2.1 zeigt die Entladekurve eines unbekanntes Kondensators in Reihen mit einem Widerstand  $R = 100 \text{ K}\Omega$ . Wie lässt sich die Zeitkonstante  $\tau$  mit Hilfe der gezeichneten Tangente grafisch in dieser Abbildung ermitteln, und wie kann man die Kapazität des Kondensators daraus errechnen?

III.2.14 Die Spannung am Kondensator wird durch die schon bekannte Exponentialfunktion modelliert.

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Wie lange dauert die volle Entladung des Kondensators?

III.2.15 Die Bestimmung der Zeitkonstante  $\tau$  kann über die Messung der Spannung am Kondensator an der Halbwertszeit  $T_{1/2}$  erfolgen. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Zeitkonstante  $\tau$  und der Halbwertszeit  $T_{1/2}$  ? Geben Sie auch den Wert der Spannung am Kondensator im Zeitpunkt  $t = \tau$  an.

III.2.16 Die in .csv-Format gespeicherten Messdaten des Entladevorgangs werden mit einem Tabellenkalkulationsprogramm weiter erarbeitet. In der Abb. III.2.2 wird eine Regression als die bestmögliche Exponentialfunktion, die sich zu den Messwerten annähert, gezeigt. Verwenden Sie die zur Verfügung in .csv-Format gestellten Messdaten des Versuchs und bestimmen Sie



weitere exponentielle Regressionen auf mehreren Abschnitten des Entladevorgangs. Wie groß ist die Zeitkonstante  $\tau$  bei dieser exponentiellen Regression? Wenn die Kapazität des Kondensators  $C = 10\mu\text{F}$  ist, wie groß ist der Widerstandswert?

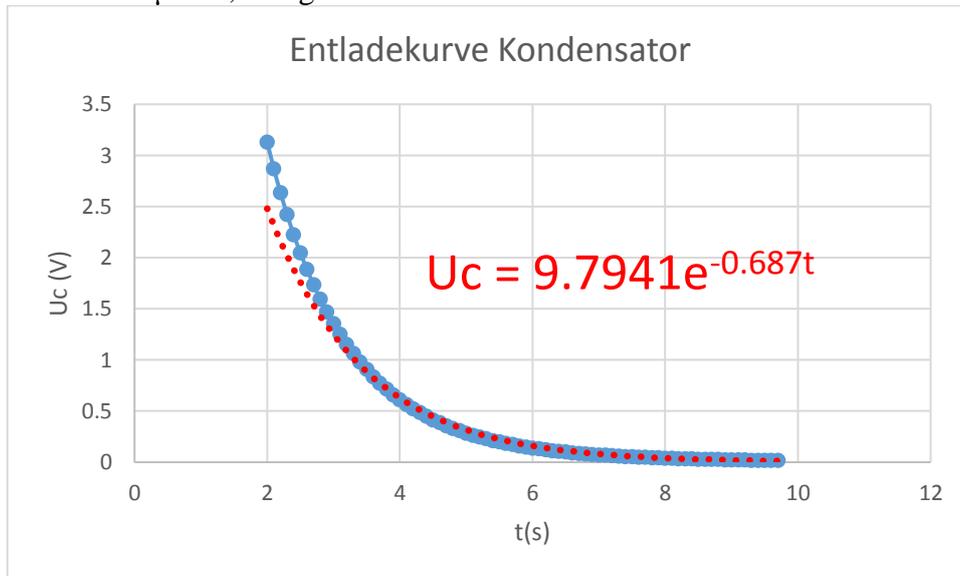


Abb. III.2.2 Die aus den in .csv-Format gespeicherten Messdaten resultierende Exponentialfunktion, die sich bestmöglich zu den Messwerten annähert.

III.2.17 Die exponentielle Abnahme der Spannung am Kondensator lässt sich durch Logarithmieren linearisieren. Geben Sie die Gleichung der logarithmierten Spannung  $U_C(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  an. Welche physikalische Bedeutung hat die Steigung der logarithmierten Spannung  $U_C(t)$  und welche Größen lassen sich daraus ermitteln?

III.2.18 In der Abb.III.2.3 wurden die logarithmierten Werte des Spannungsabfalls an einem

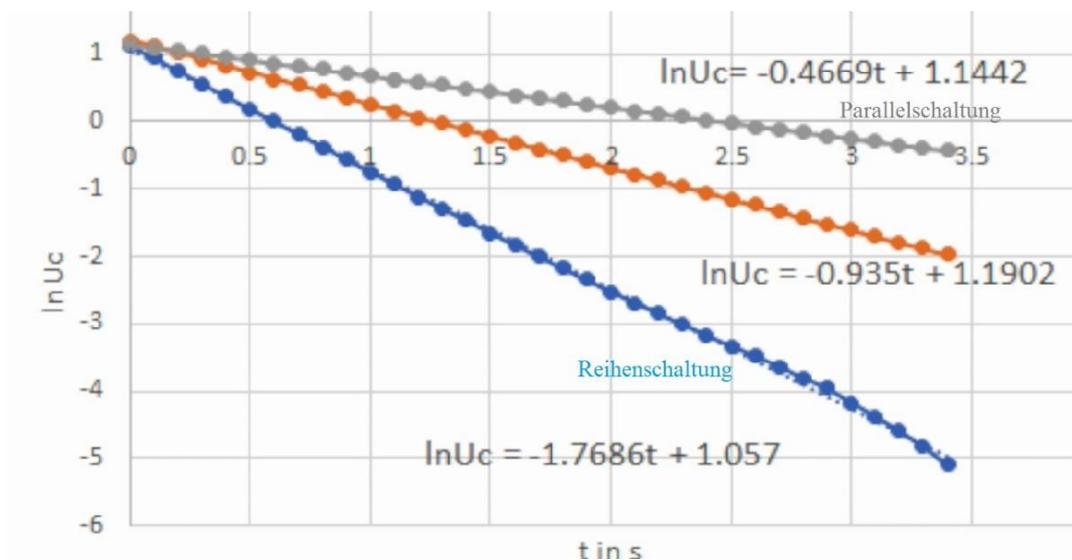


Abb.III.2.3 Logarithmierte Werte des zeitlichen Spannungsabfalls an einem einfachen Kondensator, sowie an einer Reihen- und Parallelschaltung zweier Kondensatoren derselben Kapazität. Der Vergleich der Steigungen der Regressionsgeraden führt zu der bekannten Formel der Gesamtkapazität einer Reihen- bzw. einer Parallelschaltung der Kondensatoren.



Kondensator sowie an einer Reihen- und Parallelschaltung zweier Kondensatoren derselben Kapazität grafisch dargestellt. Zusätzlich sind die drei entsprechenden Regressionsgeraden gezeigt. Wie lassen sich die bekannte Formel für die Gesamtkapazität der Reihen- bzw. der Parallelschaltung daraus bestätigen?

III.2.19 Für den Ladevorgang des elektrolytischen Kondensators gilt weiterhin die in der Aufgabe III.2.11 eingeführte 2. Kirchhoffschen Regel. Die Spannungsabfälle  $U_C(t)$  und  $U_R(t)$  lassen sich in Abhängigkeit vom zeitlichen Verlauf der Ladung  $Q(t)$  angeben. Die daraus resultierende Differentialgleichung hat die Lösung die Funktion  $Q(t)$ . Während der Ladevorgangs bleibt der Kondensator in Reihen mit dem Widerstand an der konstanten Spannungsquelle  $U_0$  angeschlossen. Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist:

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Leiten Sie diese Funktion her.

III.2.20 Der Ladestrom  $I(t)$  ist die zeitliche Ableitung der Funktion  $Q(t)$ . Bestimmen Sie  $I(t)$ . Skizzieren Sie die Graphen der zwei Funktionen  $Q(t)$  und  $I(t)$  und vergleichen Sie sie mit den realen zeitlichen Verläufen der zwei physikalischen Größen im PhyPiDAQ-Diagrammfenster, oder mit der in der Abb.III.1.3 gezeigten Momentaufnahme der zwei Größen. Untersuchen Sie die Auswirkung einer größeren Kapazität, bzw. eines größeren Widerstandswerts auf die Funktionen  $Q(t)$ ,  $U_C(t)$  und  $I(t)$ . Führen Sie den entsprechenden Versuch durch und überprüfen Sie den realen zeitlichen Verlauf mit Ihrer Vermutung.

III.2.21 Der Kondensator speichert elektrische Ladung und Energie. Geben Sie die Formel der im Kondensator gespeicherten Energie an. Betrachtet man erneut einen Entladevorgang eines elektrolytischen Kondensators über einen angeschlossenen Widerstand. Erläutern Sie die Energieumwandlung während dieses Vorgangs.

III.2.22 Ein Akkumulator ist auch ein Energiespeicher. Worin unterscheidet sich ein Kondensator von einem Akku?

III.2.23 Beim Laden eines Kondensators geht die Energie vom Netzgerät durch die Ladungsträger in den Kondensator hinein. Beim Entladen gibt der Kondensator diese an den Widerstand ab. Beim Stromfluss durch den Widerstand wird elektrische Energie in thermische Energie  $W$  umgewandelt. Durch Integrieren der elektrischen Leistung

$$P(t) = I(t)^2 \cdot R$$

lässt sich die umgewandelte Energie  $W$  über eine bestimmte Zeit bestimmen. Nun betrachtet man den Entladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand  $R$  beginnend mit der Zeit  $t_0 = 0s$ . Geben Sie die Formel zur Bestimmung der in der Zeit  $t$  entstandenen thermischen Energie  $W$  durch den Entladestrom im Widerstand  $R$ .

III.2.24 Die thermische Energie  $W$  lässt sich durch die numerische Integration der experimentellen Messdaten berechnen. Die in .csv-Format gespeicherten Messwerte der Entladestrom werden mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms wie z.B. Excel, zuerst



quadriert und danach mit dem Widerstandswert multipliziert. Die numerische Integration kann durch die Trapezregel für eine Zeitspanne von  $\Delta t$  erfolgen. Die Zeitspanne  $\Delta t$ , wie z.B.  $\Delta t = 0,1s$ , ist in der .daq-Konfiguration einstellbaren Messzeitintervall. Sie wird in der .daq-Konfiguration der Messung eingegeben, und in der .csv-Messwertentabelle abgelesen. Integrieren Sie mit dieser numerischen Methode die thermische Energie, die durch den Entladestromfluss eines Kondensators über verschiedene Widerstände entsteht. Welche Aussage machen Sie über die erhaltenen Werte, wenn eine lange Integrationszeit betrachtet wird?

#### IV. Einbettung des Messsystems und der Messdaten in den Mathematikunterricht zur Untersuchung von Exponentialfunktionen

IV.1 Der Auflade- und Entladevorgang eines Kondensators wird mit Hilfe einer Exponentialfunktion modelliert. Beim allgemeinen exponentiellen Wachstum wächst die Größe  $y$  mit dem festen Faktor  $q$ , wenn die Größe  $x$  um 1 zunimmt. Weisen Sie mit Hilfe der realen in .csv-Format gespeicherten Messwerte nach, dass das Aufladen eines Kondensators ein exponentielles Wachstum ist.

IV.2 In der Abb.IV.1 wird gezeigt, wie man den Wachstumsfaktor  $q$  mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, wie z.B. mit Excel, bestimmen kann.

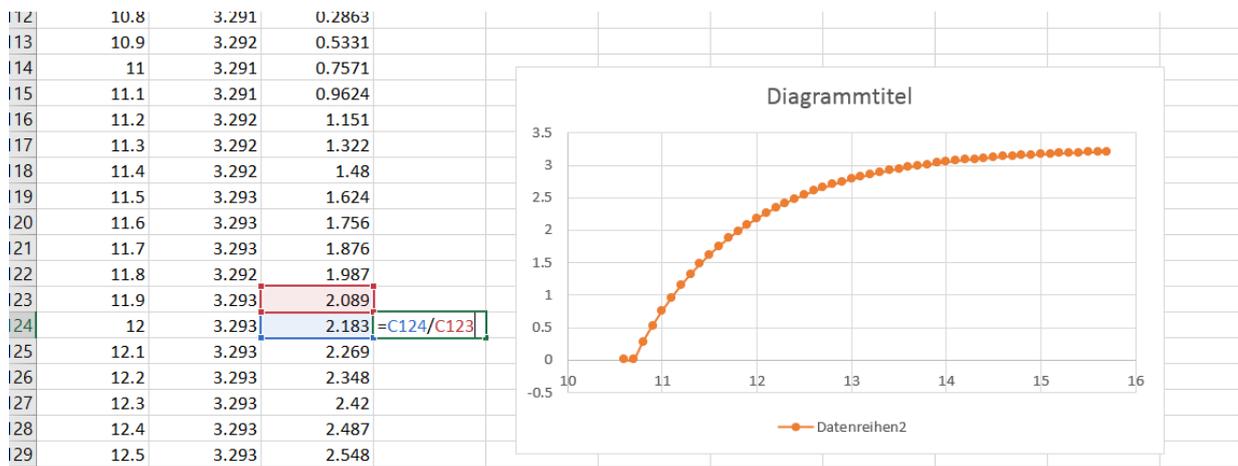


Abb.IV.1 Bestimmung des Wachstumsfaktors  $q$  beim Aufladen eines Kondensators mit Hilfe des Excel-Programms.

Von den zur Verfügung stehenden realen Messdaten in .csv-Format wählen Sie Abschnitte für das Aufladen des Kondensators aus. Bestimmen Sie daraus den Wert des Wachstumsfaktors  $q$ . Wiederholen Sie das Verfahren für einen Entladevorgang. Vergleichen Sie die ermittelten Werte. Wie hängen diese Werte von der Spannung am Anfang des Lade- oder des Entladevorgangs?

IV.3 Zahlenfolgen und Reihen sind Teil des mathematischen Grundwissens. Eine geometrische Zahlenfolge entsteht nach dem rekursiven Bildungsgesetz:

$$a_n = q \cdot a_{n-1} , \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a_1 \in \mathbb{R}$$



Leiten Sie das explizites Bildungsgesetz einer Zahlenfolge her. Vergleichen Sie die exponentielle Zunahme der Spannung am Kondensator beim Aufladen mit der Formel einer geometrischen Zahlenfolge.

IV.4 Der Entladestrom  $I(t)$  ist der Differentialquotient der elektrischen Ladung  $Q(t)$ .

$$Q(t) = C \cdot U_C(t)$$

Diesen kann man durch das Ableiten der Spannung am Kondensator bei bekannter Kapazität des Kondensators bestimmen. Die numerische Ableitung der Spannung am Kondensator erfolgt, indem der Differenzenquotient als Verhältnis der Differenz zweier nacheinander Spannungswerte ( $U_{i+1} - U_i$ ) zum in der Analog-Digitalwandler-ADS1115-Konfiguration einstellbaren Messzeitintervall  $\Delta t$  mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, wie z.B. Excel, durchgeführt wird.

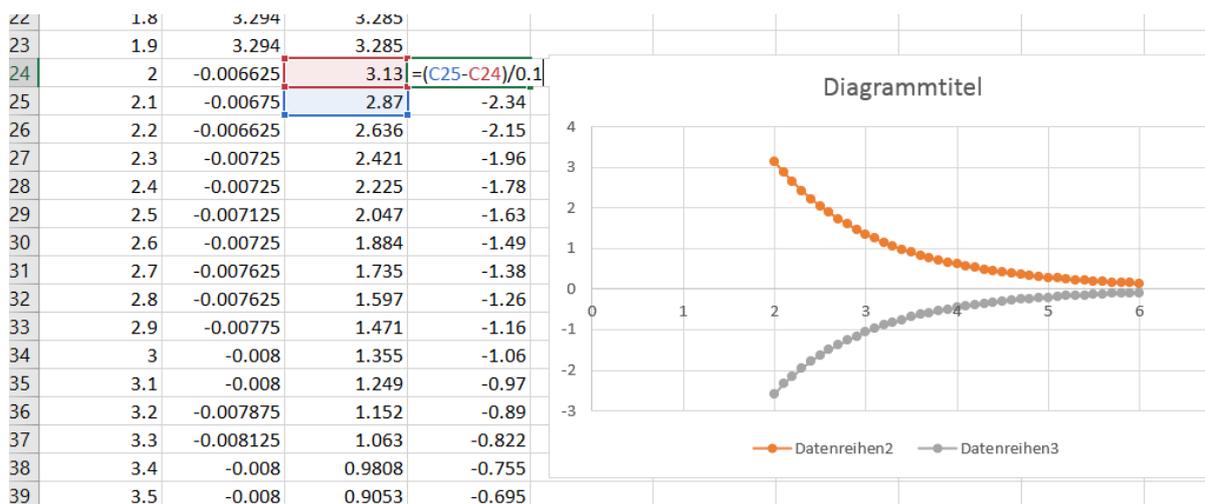


Abb.IV.2 Entladekurve des Kondensators  $U_C(t)$  (orange im Diagramm) und die aus der numerischen Ableitung der Spannung  $U_C(t)$  entstandene Kurve (grau).

Führen Sie eine numerische Ableitung der realen Messdaten der Entladespannung am Kondensator durch. Vergleichen Sie die entstandene Kurve mit dem zeitlichen Verlauf des Entladestroms in der Abb.III.1.3. Wiederholen Sie das Verfahren für das Aufladen des Kondensators. Interpretieren Sie den Zusammenhang zwischen den beweglichen und den gespeicherten Ladungen in den zwei Vorgängen.

IV.5 In den schon erstellten Spalten des Tabellenkalkulationsprogramms in der Aufgabe IV.4 betrachtet man den Wert des Differenzenquotienten  $\frac{U_{i+1}-U_i}{\Delta t}$  sowie den Wert der Spannung  $U_i$  im Zeitpunkt  $t_i$ . Weisen Sie durch weitere Rechnung in derselben Excel-Anwendung nach, dass sich diese Werte proportional zueinander sind. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und geben Sie ihre physikalische Bedeutung in Verbindung mit der Kapazität und mit dem Widerstandswert an.

IV.6 Vergleichen Sie Ihr Ergebnis der Aufgabe IV.5 mit der durch Ableiten der Spannung am Kondensator entstandenen Gleichung:



$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{\tau} U_C(t)$$

Berechnen Sie den Wert der Zeitkonstante  $\tau$  aus den bekannten Werten der Kapazität und des Widerstands und vergleichen Sie den Kehrwert der Zeitkonstante  $1/\tau$  erneut mit der Proportionalitätskonstante in der Aufgabe IV.5.

IV.7 Den zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator während des Auflades ergibt sich durch den Quotienten der Ladung  $Q(t)$  und der Kapazität des Kondensators. Ausgehend von der exponentiellen Zunahme der Ladung  $Q(t)$  in der Aufgabe III.2.19 geben Sie den exponentiellen Zuwachs der Spannung am Kondensator, sowie die durch ihre Ableitung entstandene Gleichung.

IV.8 Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{RC} U_C(t) \quad (1)$$

$$\frac{dU_C}{dt} = +\frac{1}{RC} U_C(t) \quad (2)$$

Welche Gleichung wird zum Aufladen des Kondensators zugeordnet? Wie wurden diese Gleichungen aus der Spannung am Kondensator  $U_C(t)$  hergeleitet?

IV.9 Skizzieren Sie die Abnahme der Temperatur eines heißen Körpers gebracht in eine Umgebung der Temperatur  $t_U = 0^\circ\text{C}$ . Welche Gemeinsamkeiten kann man zwischen dem Entladen eines Kondensators und dem Abkühlen des Körpers feststellen? Wenn die Differentialgleichung des Entladevorgangs bekannt ist, schreiben Sie die Differentialgleichung des Abkühlens.

IV.10 Ausgehend von der Differentialgleichung des Abkühlens eines Körpers und des Entladens eines Kondensators kann man die allgemeine Differentialgleichung eines exponentiellen Vorgangs definieren:

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha \cdot f(x)$$

Geben Sie begründet das Vorzeichen der Konstante  $\alpha$  für einen exponentiellen Zuwachs, bzw. Abfall an. Beschreiben Sie weitere Vorgänge, die man exponentiell modellieren kann, und geben Sie die Bedeutung der dazu gehörigen  $\alpha$ -Konstante an.

IV.11 Vergleichen Sie den Differenzenquotienten  $\frac{Q_{i+1}-Q_i}{\Delta t}$  mit der mechanischen Geschwindigkeit  $\frac{s_{i+1}-s_i}{\Delta t}$ . Beschreiben Sie eine zeichnerische Methode, mit der man die maximale Lade-, bzw. Entladegeschwindigkeit in der Abb.III.1.4 ermitteln kann. Zu welchen Zeitpunkten erreicht der Lade- bzw. der Entladestrom sein Maximum? Bestätigen sich Ihre Ergebnisse mit den Werten des Lade- und des Entladestroms in der Abb.III.1.3?